

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas nº 9

EDPs e método das características

1. Verifique que $u(x, t) = f(t/x)$, para $x \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , é solução da EDP:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + t \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Considere a EDP linear de primeira ordem

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- (a) Encontre soluções desta equação do tipo $u(x, t) = v(x)w(t)$, i.e. pelo *método de separação de variáveis*. Determine uma solução que verifique a condição inicial $u(x, 0) = e^{3x}$.

- (b) Verifique que as funções do tipo $u(x, t) = f(x + 3t)$, com $f \in C^1(\mathbb{R})$ são solução da EDP.

- (c) Efectue a mudança de variáveis $s = 3x - t, r = x + 3t$ para encontrar a solução geral da EDP. Determine uma solução que verifique a condição inicial $u(x, 0) = x^2$.

3. Mostre que $u(x, t) = e^{-8t} \sin(2x)$ é solução do problema com condições iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin(2x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

4. Determine a solução geral da EDP (i) $u_{xy} = 0$, em $\mathbb{R}^2$ (ii) $xu_x + u = x^2$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, onde daqui em diante usamos a **notação** $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

5. Diga se os seguintes problemas são bem-postos:

(a)

$$\begin{cases} u_y = 0, \\ u(0, y) = f(y) \end{cases}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função dada.

(b)

$$\begin{cases} u_y = 0, \\ u(x, p(x)) = f(x) \end{cases}$$

onde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas.

6. Resolva os seguintes problemas:

(a)

$$\begin{cases} u_y = x^2 + y^2, \\ u(x, x^2) = x + x^2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u_y = \text{sen}(y/x), \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} u_x = u + e^x + y, \\ u(0, y) = y \end{cases}$$

7. Verifique se os seguintes problemas seguintes têm solução e, nesse caso, encontre-a:

(a)

$$\begin{cases} u_y = xe^y, \\ u(y^2, y) = e^{y^2} + y^4 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u_y = xe^y, \\ u(y^2, y) = y^2 e^y \end{cases}$$

8. Usando o método das características, resolva a equação $u_x + u_y = 2$, com a condição inicial $u(x, 0) = x^2$ e $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Considere o problema

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0, f \in C(\mathbb{R}) \end{cases}$$

(a) Determine e represente graficamente as características para a EDP dada.

(b) Determine a solução do problema no subconjunto de $\mathbb{R}^2$ apropriado.

10. Determine a solução geral das equações:

(a) $u_x + 2xy^2u_y = 0$, em $\mathbb{R}^2$.

(b) $x^2u_x - xyu_y + yu = xy^2$, no semi-plano $x < 0$.

(c) $-2yu_x + u_y = ye^x$, em $\mathbb{R}^2$.

11. Considere a EDP de coeficientes constantes $au_x + bu_y + du = c$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

(a) Determine as características da EDP.

(b) Use a mudança de variável $s = ax + by$, $t = -bx + ay$ para transformar a EDP dada na equação $(a^2 + b^2)w_s + dw = c$.

(c) Resolva a equação da alínea anterior e mostre que a solução da EDP dada, para $d \neq 0$, é:

$$u(x, y) = \frac{c}{d} + f(-bx + ay)e^{-\frac{d}{a^2+b^2}(ax+by)}$$

12. Indique as condições para as quais existem soluções do seguinte problema e resolva-o:

$$\begin{cases} u_x = 2x & (x, y) \in \mathbb{R}^2, u \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

13. Mostre que o seguinte problema tem uma infinidade de soluções em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1 \\ u(x, x) = x \end{cases}$$

14.* Resolva o seguinte problema de Cauchy em $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u_z = u^2 \\ u(x, y, 0) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

15.* Equações (de Burgers) não-lineares da forma $u_t + f(u)u_x = 0$ surgem na dinâmica de fluídos e originam singularidades que são interpretadas como choques. Considere o problema:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad \text{onde} \quad u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

(a) Determine as características planas da EDP, mostre que se intersectam para $t \geq 1$ e represente-as graficamente.

(b) Determine a solução do problema para $0 \leq t < 1$.

Soluções

2. a) $u(x, t) = e^{3(3t+x)}$
 2. c) $u(x, t) = (x + 3t)^2$
 4. i) $u(x, t) = f(x) + g(y)$
 4. ii) $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}f(y)$
 5. a) Não
 5. b) Sim
 6. a) $u(x, y) = x + x^2 + x^2y + y^3/3 - x^4 - x^6/3$
 6. b) $u(x, y) = 2x - x \cos(y/x), \quad x > 0$
 7. a) Não tem solução.
 7. b) $u(x, y) = xe^y + f(x)$, com $f(x) = 0, \quad \forall x \geq 0$
 8. $u(x, y) = 2y + (x - y)^2$
 9. a) $x^2 + y^2 = C$
 9. b) $u(x, y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$
 10. a) $u(x, y) = f(x^2 + \frac{1}{y})$
 10. b) $u(x, y) = xy + f(xy)e^{\frac{y}{2x}}$
 10. c) $u(x, y) = -\frac{1}{2}e^x + f(x + y^2)$
 11. a) $ay - bx = K$
 12. a) rectas horizontais $y = K$
 12. b) problema tem solução se $f(x) = x^2 + C$, sendo $u(x, y) = g(y) + x^2$ com $g(0) = f(0) = C$.
 13. a) $y = K$
 13. b) $u(x, y) = x - \sqrt[3]{y} + f(x)$ 14. $u(x, y, z) = \frac{(x-z)^2 + (y-z)^2}{1 - [(x-z)^2 + (y-z)^2]z}$
 15. a)

$$x = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0 \\ (1 - x_0)t + x_0, & 0 \leq x_0 \leq 1 \\ x_0, & x_0 > 1 \end{cases}$$

15. b)

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x < 1 \\ 0, & t < 1 \leq x \end{cases}$$