

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas nº 8

EDOs de ordem $n \geq 2$

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$ (b) $y'' + 8y' + 41y = 0$ (c) $y'' - y = 0$ (d) $y'' + y = 0$.

(e) $y'' - 2y' + 5y = 0$. (f) $y'' + 2y' + y = 0$.

2. Seja m um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$$

3. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por $y_1(x) = xe^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$.

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

(b) Determine a_0 , a_1 e a_2 com as propriedades acima descritas.

4. Obtenha as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

(a) $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$.

(b) $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \cos x, \operatorname{sen} x$

(c) $1, x, e^x$;

5. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y'' - 5y' + 6y = e^t$ (c) $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$

(d) $y'' - 5y' + 6y = t + te^t + 1$ (e) $y'' - 5y' + 6y = \operatorname{sen} t$.

6. Procurando soluções da forma $y = t^\lambda$, determine a solução geral de

(a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$.

(b) $t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$.

7. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y = 1 - \frac{1}{t}$$

(a) Determine soluções da equação homogênea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogênea.

(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

1. (a) $y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$

(b) $y(x) = e^{-4x}(c_1\cos(5x) + c_2\sin(5x))$

(c) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$

(d) $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$

(e) $y(x) = e^x(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))$

(f) $y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

2. $y(x) = \frac{1}{2}t^2e^{mx}$

3. (b) $a_0 = 0$, $a_1 = -3$ e $a_2 = -2$

4. (a) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ (b) $y^{(4)} - y = 0$ (c) $y''' - y'' = 0$

5. (a) $y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{10}(\sin t + 2\cos t)$

(b) $y = \frac{1}{2}e^t + c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$

(c) $y = -te^{2t} + c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$

(d) $y = \frac{11}{36} + \frac{t}{6} + \frac{1}{4}(3+2t)e^t + c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2(D-1)^2$

(e) $y = \frac{\sin t + \cos t}{10} + c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2 + 1$.

6. (a) $y = c_1\sqrt{t} + \frac{c_2}{t}$

(b) $y = \frac{1}{t}(c_1\cos(2\ln t) + c_2\sin(2\ln t))$

7. (a) $\lambda = k = 1$, $y_H(t) = c_1e^t + c_2t$

(b) $y(t) = (2 + \ln 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t \ln t$