

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas nº 7

Exponencial de uma matriz, sistemas de EDOs, diagramas de fase

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} :

(a) $A = 0$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine a solução geral dos sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$

3. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

5. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 5/2 \\ 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

6. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

(b) Esboce o diagrama de fase do sistema.

7. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

8. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{At} e^{(B-A)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

Soluções

$$1. \quad (a) e^{At} = I \quad (b) e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix} \quad (c) e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$(d) e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e) e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 12t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$$

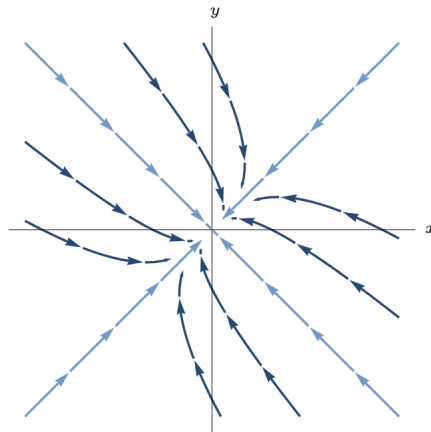
$$(f) e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) & -2\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

$$2. \quad (a) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1 + 2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad (a) X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b) X(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} -3t + 4 \\ 3t - 3 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

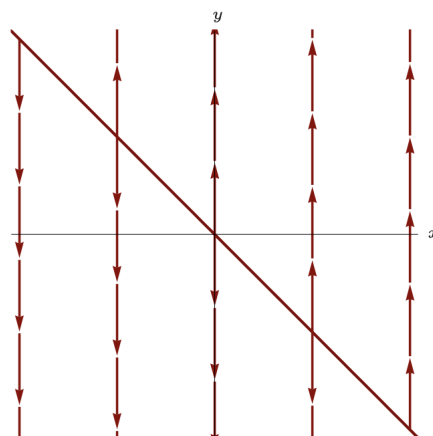
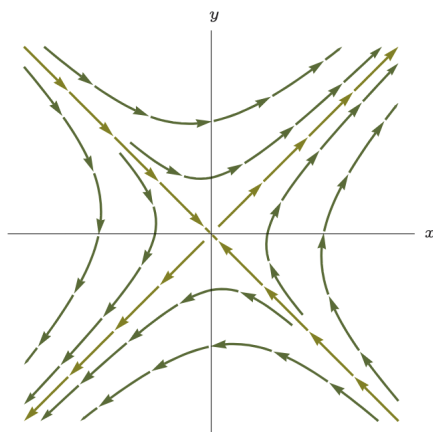


5.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0) e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



7. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$