TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III 2025/26

Cursos: LEC e LEME

Ficha de Problemas Resolvidos nº 5
EDOs separáveis e EDOs lineares de 1ª ordem

1. Indique a ordem da equação diferencial $y'' + \pi^2 y = 0$. Verifique que $y(x) = a\cos(\pi x) + b\,\text{sen}(\pi x)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é solução e $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$.

   Resolução:

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Como

$$y'(x) = -\pi a\,\text{sen}(\pi x) + \pi b\cos(\pi x), \qquad y''(x) = -\pi^2 a\cos(\pi x) - \pi^2 b\,\text{sen}(\pi x),$$

então

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = -\pi^2 a\cos(\pi x) - \pi^2 b\,\text{sen}(\pi x) + \pi^2 a\cos(\pi x) + \pi^2 b\,\text{sen}(\pi x) = 0$$

A afirmação é verdadeira para todo x, a e $b \in \mathbb{R}$ e assim, $y(x)$, é solução da equação. Para calcular as constantes a e b de modo a que $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$, substituimos na solução e na sua derivada x por $1/2$:

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = a\cos\frac{\pi}{2} + b\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1 \\ y'(\frac{1}{2}) = -\pi a\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + b\pi\cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

pelo que a solução da equação que verifica as condições dadas é $y(x) = \text{sen}(\pi x)$.

2. Determine a solução do problema de valor inicial $y' = xe^{x^2/2}$ com $y(1) = 2$.

   Resolução:

Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = \int xe^{x^2/2}dx \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = e^{x^2/2} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial, $2 = y(1) = e^{1/2} + c$, pelo que $c = 2 - e^{1/2}$. A solução do problema de valor inicial é, pois:

$$y(x) = e^{x^2/2} - e^{1/2} + 2.$$

3. Determine todas as soluções da equação diferencial ordinária linear

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x, \qquad \text{para } \ x > 0.$$

Resolução:

Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{(x-2)}{x}\,e^x \tag{1}$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\,\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} == e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2 y) = (x^2-2x)e^x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 y = \int (x^2-2x)e^x dx + c\\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x^2-4x+4)e^x + c\Big)\\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x^2}\Big((x-2)^2 e^x + c\Big)\end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

4. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0, \ \ v(0) = 1.$$

Resolução:

A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \tag{2}$$

que é uma equação linear em v e admite um factor integrante, $\mu(u)$, dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \quad \Leftrightarrow \quad \log\mu = \log(1+u^2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1+u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos

$$(1+u^2)\frac{dv}{du}+2u\,v=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{du}\Big((1+u^2)v\Big)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad (1+u^2)v=u+c$$

$$\Leftrightarrow\quad v(u)=\frac{u+c}{1+u^2}$$

Dado que

$$1=v(0)=c,$$

a solução do PVI é

$$v(u)=\frac{u+1}{u^2+1}$$

5. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx}+2xy^5-y=0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v=y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1)=1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, fazemos $v(x)=\big[y(x)\big]^{-4}$ pelo que

$$\frac{dv}{dx}=-4y^{-5}\frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $-4y^{-5}$, obtém-se:

$$2x\Big(\underbrace{-4y^{-5}\frac{dy}{dx}}_{\frac{dv}{dx}}\Big)\;+\;2x\big(-4\underbrace{y^{-5}y^5}_{1}\big)\;+\;4\underbrace{y^{-5}y}_{v}\;=\;0,$$

ou seja,

$$2x\frac{dv}{dx}\;-\;8x\;+\;4v\;=\;0$$

Dividindo por $2x$ e rearranjando os termos, obtém-se a equação linear não homogénea:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = 4 \tag{3}$$

O seu factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (3) por $\mu(x)$

$$x^2 \frac{dv}{dx} + 2x\, v = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\big(x^2 v\big) = 4x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 v = \frac{4x^3}{3} + c \;\Leftrightarrow\; v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável,

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}} = \pm \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 + c}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}.$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 1 \neq 0 \text{ e } \frac{3x^2}{4x^3 - 1} > 0 \right\} = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$, ou seja:

$$I = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

6. Encontre as soluções da equação $y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 1$ no intervalo $]0, \pi[$. Mostre que só há uma solução tal que $\lim_{t \to 0} y(t)$ é finito e indique um problema de valor inicial que tenha essa solução.

Resolução:

É de notar que $(\operatorname{sen} t)' = \cos t$ e, como tal, a equação pode ser escrita na forma

$$y' \operatorname{sen} t + y(\operatorname{sen} t)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \big(y \operatorname{sen} t\big)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \operatorname{sen} t = t + C \qquad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Dado que para $t \in]0, \pi[$ a função $\operatorname{sen} t$ não se anula, resulta que a solução geral da equação (definida nesse intervalo) é dada por

$$y(t) = \frac{t + C}{\operatorname{sen} t},$$

com $C \in \mathbb{R}$. Como para $C \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} y(x) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} + C \lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \;=\; 1 + C \lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} \;=\; 1 \pm \infty = \pm\infty$$

então o limite da solução quando $t \to 0$ só é finito quando $C = 0$; nesse caso,

$$y(t) = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0} y(x) = 1.$$

A condição inicial a acrescentar a equação diferencial pode ser a seguinte:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Obtenha a solução $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte equação:

$$y(t) = 1 + \int_1^t s y(s)\, ds. \tag{4}$$

Resolução:

Derivando ambos os membros da equação integral (4) em ordem a t e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtém-se:

$$y'(t) = \left(\int_1^t s f(s)\, ds\right)' \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = t y(t)$$

Desta forma, $y(t)$ é solução da equação linear homogenea

$$y' = ty \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) \;=\; K e^{\int t\, dt} \;=\; K e^{\frac{t^2}{2}}$$

onde $K \in \mathbb{R}$. Atendendo a que, pela mesma equação (4), $y(1) = 1$ tem-se que $Ke^{1/2} = 1$, ou seja, $K = e^{-1/2}$. Assim, a solução da equação integral é

$$y(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}$$

e está definida para $t \in \mathbb{R}$.

8. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

$$(\mathbf{a}) \quad xy + (1+x^2)y' = 0 \qquad\qquad (\mathbf{b}) \quad y' = 1 - x + y^2 - xy^2$$

Resolução:

(a) Para $y \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + c \\ &\Leftrightarrow \quad \log|y| = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{\pm e^c}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Note-se que a função nula, $y(x) \equiv 0$ é também solução da equação diferencial.

(b) A equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} y' = (1-x)(1+y^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\int \frac{dy}{y^2+1}\Big) = 1 - x \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x - \frac{x^2}{2} + c) \end{aligned}$$

9. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial.

$$\frac{du}{dt} = tu^3(1+t^2)^{-1/2}, \qquad u(0) = 1$$

Resolução:

Trata-se de uma equação separável que pode ser escrita na forma

$$u^{-3}u' = t(1+t^2)^{-1/2}$$

Integrando em ordem a t

$$\int u^{-3}du = \int t(1+t^2)^{-1/2}dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^{-2}}{-2} = (1+t^2)^{1/2} + c$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1+t^2}}} \quad \text{ou} \quad u(t) = \frac{-1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1+t^2}}}$$

Dado que $u(0) = 1 > 0$ conclui-se que $c = 3$ e assim a solução do (PVI) é

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+t^2}}}$$

10. Considere a equação diferencial separável

$$x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$$

Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

Para $x \neq 0$ e $x \neq -1$ (podemos excluir estes dois casos visto que $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv -1$ são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x + x^2} = \operatorname{sen} t \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c$$

Fazendo a separação em fracções simples da função $\frac{1}{x^2+x}$, obtém-se

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \operatorname{sen} t \, dt + c \;\Leftrightarrow\; \log \left| \frac{x}{x+1} \right| = -\cos t + c \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x+1} = k\, e^{-\cos t}$$

Visto $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, temos que $k = 2$ e a solução do (PVI) é

$$x(t) = \frac{2\, e^{-\cos t}}{1 - 2\, e^{-\cos t}} = \frac{2}{e^{\cos t} - 2}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $x(t)$ é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{\cos t} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm \arccos(\log 2) + 2k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Teremos então que o intervalo máximo de existência de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $\pi/2 \in I$. Conclui-se

$$I \;=\; \left]\, \arccos(\log 2), -\arccos(\log 2) + 2\pi \right[$$

11. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e a, b e c constantes reais com $b \neq 0$.

a) Mostre que a substituição $v = at+by+c$, transforma a equação numa equação separável.

b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

(a) Se $v = at + by + c$ e $b \neq 0$, então

$$y = \frac{v - at - c}{b}$$

pelo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}\Big(\frac{dv}{dt} - a\Big)$$

Substituindo na equação

$$\frac{dv}{dt} - a = bf(v) \ \Leftrightarrow\ \frac{\dot{v}}{bf(v) + a} = 1$$

que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo $f(v) = e^v - 2$, com $v = 2t + y - 1$, obtém-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\Big(\int e^{-v} dv\Big) = 1 \ \Leftrightarrow\ -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow\ v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \ \Leftrightarrow\ y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que $y(0) = 1$, obtem-se $k = -1$ e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(t)$ é

$$D = \{t \in \mathbb{R} \ :\ 1 - t > 0\} =]-\infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $0 \in I$. Conclui-se que

$$I =]-\infty, 1[$$