Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEC e LEME

Ficha de Problemas nº 4

Teorema de Stokes

1 Exercícios Propostos

1. Considere o campo vectorial
$$F(x,y,z) = (y,z,x)$$
e a superfície S igual ao hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calculo o fluxo do $\operatorname{rot} F$ através de S utilizando

   (a) A definição de fluxo.

   (b) O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$ sendo

   (a) S é a porção do parabolóide $z = x^2+y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2=4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (x^2z^2, y^2z^2, xyz).$$

   (b) S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal ν com primeira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, (x^2y^2+1)z, -y).$$

   (c) S a superfície parametrizada por $g(u,v) = (u,v,1-u^2-v^2)$, $u>0$, $v>0$, $u+v<1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

   (a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $y=z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e
$$F(x,y,z) = (y+z, -z, y)$$

   (b) C é a curva de intersecção do plano $x+z=5$ com o cilindro $x^2+y^2=9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e
$$F(x,y,z) = (xy, 2z, 3y)$$

(c) C é o triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(x - z, y - x, z - xy\big).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial F ao longo da curva C, sendo:

   (a) C o bordo da superfície

   $$S \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y^2 + z^2 = 1\;,\; 0 < x < 1\Big\},$$

   orientada com uma normal à sua escolha, e

   $$F(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

   (b) C é a curva parametrizada por

   $$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

   e F o campo vectorial dado por

   $$F(x, y, z) \;=\; \big(x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3\big).$$

5. Considere a superfície

   $$S \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = x^2 + z^2\;;\; 1 < y < 4\Big\},$$

   orientada com a normal ν cuja segunda componente é positiva.

   (a) Sabendo que S tem densidade superficial de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$ calcule a massa total de S.

   (b) Calcule o fluxo do campo vectorial

   $$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, -y, -z)$$

   através de S no sentido da normal ν.

6. Sejam $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e V um domínio nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que o fluxo do campo vectorial

   $$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{r}$$

   através da superfície ∂V é igual a zero quando a origem está no exterior de V. Qual será o valor desse fluxo quando V contiver a origem no seu interior?

2 Soluções

1. $-\pi$

2. (a) 0
   (b) -2π
   (c) $-\frac{5}{6}$

3. (a) -2π
   (b) 9π
   (c) $\frac{3}{2}$

4. (a) 0
   (b) 0

5. (a) 33π
   (b) -15π

6. 4π