

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEC e LEME

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 3

#### Fluxo e Teorema da Divergência

## 1 Exercícios Resolvidos

- Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

através da superfície  $S$  definida por  $z = 1 - x^2 - y^2$  e  $z \geq 0$  orientada pela normal com terceira componente positiva.

**Resolução:**

Trata-se de uma porção do parabolóide de equação  $z = 1 - x^2 - y^2$  de vértice  $(0, 0, 1)$  situada acima do plano  $z = 0$ . Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$$

com  $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$ , dado que a intersecção de  $z = 1 - x^2 - y^2$  com o plano  $z = 0$  é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ . Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vector normal a  $S$  necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Atendendo à orientação dada, devemos usar este vector  $\vec{N}$  e não o seu simétrico  $-\vec{N} = (-2u, -2v, -1)$ . O fluxo do campo de  $F$  através de  $S$  é então dado por

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iint_D (u, v, 1 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv = \iint_D (u^2 + v^2 + 1) du dv.$$

Atendendo a que  $D$  é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares,  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$  para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é  $\rho$ ) de onde resulta que:

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 1) \rho d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

2. Mostre que  $36\pi$  é o valor do fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (0, 0, z)$$

através da superfície esférica  $S$  definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  orientada segundo a normal exterior a  $S$ .

**Resolução:**

Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície  $S$  pode ser parametrizada por

$$g(\theta, \phi) = (3 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 3 \cos \phi)$$

para  $\theta \in ]0, 2\pi[$  e  $\phi \in ]0, \pi[$ . Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3 \sin \phi \sin \theta, 3 \sin \phi \cos \theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3 \cos \phi \cos \theta, 3 \cos \phi \sin \theta, -3 \sin \phi)$$

Como tal, a expressão do vector normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 \sin \phi \sin \theta & 3 \sin \phi \cos \theta & 0 \\ 3 \cos \phi \cos \theta & 3 \cos \phi \sin \theta & -3 \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= (-9 \sin^2 \phi \cos \theta, -9 \sin \theta \sin^2 \phi, -9 \cos \phi \sin \phi) \end{aligned}$$

Atendendo à orientação dada, há que considerar o vector normal

$$-\vec{N} = (9 \sin^2 \phi \cos \theta, 9 \sin \theta \sin^2 \phi, 9 \cos \phi \sin \phi)$$

que "aponta para cima" no hemisfério norte (onde  $\phi \in ]0, \pi/2[$ ) e aponta "para baixo" no hemisfério sul (onde  $\phi \in ]\pi/2, \pi[$ ). O fluxo do campo  $F$  ao longo da superfície  $S$  é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iint_D (0, 0, z(\theta, \phi)) \cdot (-\vec{N}(\theta, \phi)) \, d\theta \, d\phi \\ &= \iint_D (3 \cos \phi) (9 \cos \phi \sin \phi) \, d\theta \, d\phi \\ &= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{-\cos^3 \phi}{3} \Big|_0^\pi = 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \\ &= 36\pi. \end{aligned}$$

3. Considere o campo vectorial  $F(x, y, z) = (x^2, xy, z)$  e  $V$  é o sólido limitado pelo paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$  e pelo plano  $z = 0$ . Calcule o fluxo de  $F$  através da fronteira de  $V$  no sentido da normal exterior a  $V$  usando:

- (a) A definição de fluxo.
- (b) O teorema da divergência.

**Resolução:**

- (a) A fronteira de  $V$  é  $S = S_1 \cup S_2$  em que  $S_1$  é o parabolóide,  $z = 4 - x^2 - y^2$ , com  $z > 0$ , e  $S_2$  é o círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$  no plano  $z = 0$ . Assim, o fluxo de  $F$  através de  $S$  é dado por:

$$\iint_S F \cdot \vec{\nu} dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{\nu}_2 dS$$

É fácil de entender que  $\vec{\nu}_2 = (0, 0, -1)$  pelo que  $F \cdot \vec{\nu}_2 = z$  e dado que em  $S_2$  se tem  $z = 0$  obtemos

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{\nu}_2 dS = 0$$

Por outro lado,  $S_1$  pode ser parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 4\}.$$

A normal a  $S_1$  é

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1),$$

e dado que a normal exterior a  $S_1$  tem terceira componente positiva, usaremos  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  para o cálculo do integral. Então

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS &= \iint_D (u^2, uv, 4 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv \\ &= \iint_D (2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2) du dv \end{aligned}$$

Fazendo a transformação para coordenadas polares ( $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ ) obtém-se

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{\nu}_1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 4 - r^2) r d\theta dr = 8\pi$$

e, como tal, o fluxo pedido é  $8\pi$ .

Para o cálculo expedito do integral anterior, note que se  $f$  é uma função periódica de média zero então

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

sendo  $b - a$  o período de  $f$ . Como exemplos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0.$$

(b) Pelo teorema da divergência

$$\iint_S F \cdot \vec{\nu} dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV$$

em que  $V$  é o sólido dado,  $S$  a sua fronteira e  $\vec{\nu}$  a normal unitária exterior a  $S$ . Dado que

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$$

e que  $\operatorname{div} F = 3x + 1$ , tem-se que

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (3x + 1) dz dx dy = \iint_D (3x + 1)(4 - x^2 - y^2) dA$$

sendo  $D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Mudando para coordenadas polares,  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , temos que

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3\rho \cos \theta + 1)(4 - \rho^2) \rho d\theta d\rho = 8\pi.$$

4. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S F \cdot \nu dS$$

em que  $F(x, y, z) = (\operatorname{sen}(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$  e  $S$  é a superfície do paralelipípedo  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$  e  $1 \leq z \leq 4$ .

**Resolução:**

Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

sendo  $E$  o paralelipípedo limitado pelos planos  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$  e  $z = 4$ . Temos então que os limites de integração serão

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 4.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 4x) = \pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\
 &= \int_{-1}^2 \int_0^1 \int_1^4 (\pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z) \, dz \, dy \, dx \\
 &= \frac{135}{2}
 \end{aligned}$$

5. Use o teorema da divergência para calcular  $\iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS$  onde  $S$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Resolução:**

A superfície  $S$  em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária  $B$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  e tem um vector normal num ponto  $(x, y, z)$  da forma  $(x, y, z)$  (o qual aponta para “fora”). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = (2, 2, z) \cdot \nu,$$

pois a normal unitária em cada ponto de  $\partial B$  é

$$\nu = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\|\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\|} = \frac{1}{2}(2x, 2y, 2z) = (x, y, z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo  $(2, 2, z)$  através de  $\partial B$ . Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
 \iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS &= \iint_S (2, 2, z) \cdot (x, y, z) \, dS \\
 &= \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\
 &= \iiint_B dV = \operatorname{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

6. Use o teorema da divergência para determinar o fluxo do campo  $F(x, y, z)$  através da superfície  $S$  na direcção da normal  $\nu$  indicada, sendo:

- (a)  $S$  é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos  $x + 2z = 4$  e  $y = 2$ ,

$$F(x, y, z) = (xyz, yz, z^2)$$

e  $\nu$  com terceira componente positiva

(b)  $S$  é o gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $0 < z < 1$ ,  $\nu$  com terceira componente não positiva e

$$F(x, y, z) = (x^2 y, -x y^2, 1)$$

**Resolução:**

**(a)** Pretendemos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

em que  $S$  é a superfície dada. Dado que  $S$  delimita um sólido,  $V$ , por aplicação do teorema da divergência tem-se que

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

sendo

$$\operatorname{div} F = (3 + y)z$$

e

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 < y < 2, 0 < z < 2, 0 < x < 4 - 2z\}$$

Então

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{4-2z} (3 + y)z \, dx \, dy \, dz = \frac{64}{3}$$

**(b)** Queremos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

Observe que  $S$  não é uma superfície fechada (isto é,  $S$  não é a fronteira de um sólido  $V$ ). Para que possamos utilizar o teorema da divergência, vamos considerar a superfície  $S_1$  constituída pelo círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  em  $z = 1$ . Seja agora  $\Sigma = S \cup S_1$  (ou seja o parabolóide “tapado” com o círculo). Como  $\Sigma$  é uma superfície fechada, podemos agora usar o teorema da divergência escolhendo a normal exterior,  $\nu$ , em  $\Sigma$  (ou seja, que aponte “para fora”). Seja  $\nu_1$  a normal a  $S_1$  (que aponta para cima). Temos

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

pelo que,

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS - \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

Pelo teorema da divergência,

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS = \iiint_E (2xy - 2xy + 0) \, dV = 0$$

em que  $E$  é o sólido que possui  $\Sigma$  como fronteira. Como consequência

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = - \iint_{S_1} F \cdot \nu_1 \, dS$$

Para determinar  $\iint_{S_1} F \cdot \nu_1 dS$ , basta notar que a normal unitária exterior ao sólido nos pontos de  $S_1$  é  $\nu_1 = (0, 0, 1)$ , pelo que  $F \cdot \nu = F_3 = 1$ . Então, com  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ , obtemos

$$\iint_{S_1} F \cdot \nu_1 dS = \iint_D dA = Vol_2(D) = \pi$$

onde concluímos que

$$\iint_S F \cdot \nu dS = -\pi$$

7. Seja  $S$  a parte do parabolóide  $z = 2 - x^2 - y^2$ , com  $z > 1$ . Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

através de  $S$  na direção da normal a  $S$  com terceira componente positiva. Note que  $F$  é da forma  $fG$ , onde  $f$  é um campo escalar e  $G$  um campo vectorial.

**Resolução:**

Vamos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu dS$$

usando o teorema da divergência. Mais uma vez se constata que  $S$  não é uma superfície fechada e, assim, para que se possa usar o teorema é necessário “tapar” inferiormente  $S$ . Considere-se

$$\Sigma = S \cup T$$

em que  $T$  é a superfície  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ . Então  $\Sigma$  é uma superfície fechada, sendo  $V$  o sólido limitado por  $\Sigma$  e  $\nu$  a normal exterior a  $\Sigma$ , tem-se que

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV$$

Dado que

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \nu dS = \iint_S F \cdot \nu dS + \iint_T F \cdot \nu dS$$

obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} F dV = \iint_S F \cdot \nu dS + \iint_T F \cdot \nu dS$$

e, como tal, o integral pedido é

$$\iint_S F \cdot \nu dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV - \iint_T F \cdot \nu dS$$

Vamos calcular estes dois integrais. Por um lado, fazendo  $r = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , temos  $F = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$  e

$$\operatorname{div} F = 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

e assim

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = 0$$

Por outro lado, em  $T$  tem-se  $\nu = (0, 0, -1)$  e assim  $F \cdot \nu = -r^{-3}z$ . Podemos parametrizar  $T$  por  $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1)$ , com  $0 < \rho < 1$  e  $0 < \theta < 2\pi$ . Então

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2 + 1)^{-3/2} \rho \, d\theta \, d\rho = \pi (\sqrt{2} - 2)$$

e finalmente

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \pi (2 - \sqrt{2})$$

8. Seja  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e considere o campo vectorial  $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$ , onde  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ . Sabendo que  $\phi(1) = 1$  e  $\operatorname{div} G = 0$ , determine  $\phi$  sem calcular  $\operatorname{div} G$  directamente.

**Resolução:**

Estando  $G$  definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , consideremos o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

Note-se que a fronteira de  $V$  é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e  $R$ , respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a  $V$  são os vectores  $-(x, y, z)$  e  $\frac{1}{R}(x, y, z)$ . Aplicando o teorema de Gauss em  $V$  obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} G \, dV = \iint_{\Sigma} G \cdot \nu \, dS$$

em que  $\Sigma$  é constituída pela esfera de raio 1,  $S_1$  e pela esfera de raio  $R$ ,  $S_R$ . Dado que  $\operatorname{div} G = 0$

$$\iint_{\Sigma} G \cdot \nu \, dS = 0$$

ou seja

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS + \iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS = 0$$

Fazemos o cálculo do segundo integral, dado que para o primeiro basta fazer  $R = 1$ , no resultado que vamos obter (e trocar o sinal, dado que a normal a  $S_1$  aponta em sentido contrário à de  $S_R$ ). Sendo  $S_R = \{(x, y, z) : \|(x, y, z)\| = R^2\}$ , tem-se que

$$G(x, y, z) = \phi(R)(x, y, z)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS &= \iint_{S_R} \phi(R)(x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) \, dS \\
&= \frac{\phi(R)}{R} \iint_{S_R} \|(x, y, z)\|^2 \, dS \\
&= R \phi(R) \text{Vol}_2(S_R) \\
&= 4\pi \phi(R) R^3
\end{aligned}$$

Fazendo  $R = 1$  e trocando o sinal, obtemos

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS = -4\pi \phi(1)$$

Sabendo que  $\phi(1) = 1$ , tem-se

$$-4\pi + 4\pi \phi(R) R^3 = 0 \Rightarrow \phi(R) = \frac{1}{R^3}$$

9. Seja  $f$  um campo escalar de classe  $C^1$  e  $g$  um campo escalar de classe  $C^2$  ambos definidos num conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Demonstre a seguinte igualdade, (designada *primeira fórmula de Green*), onde  $E$  é um sólido simples cujo fecho está contido em  $A$  e  $S$  a sua fronteira:

$$\iint_S f \nabla g \cdot \nu \, dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$$

**Resolução:**

Note que, por aplicação do teorema da divergência

$$\iint_S (f \nabla g) \cdot \nu \, dS = \iiint_E \text{div}(f \nabla g) \, dV$$

Como

$$\begin{aligned}
\text{div}(f \nabla g) &= \text{div} \left( f \frac{\partial g}{\partial x}, f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
&= \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g
\end{aligned}$$

o resultado fica, assim, demonstrado.