

Método das Características para Equações Diferenciais Quase-Lineares de 1^a Ordem

João Teixeira, Maria João Borges

Edição de 2021/22

1 Método das Características

Vejamos agora um método muito utilizado no cálculo de soluções explícitas de equações diferenciais quase-lineares de 1^a ordem, que se baseia na noção de curva característica.

Uma equação diferencial parcial da forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (1)$$

onde a e b são funções de classe C^1 (definidas num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ diz-se uma *equação diferencial parcial quase-linear* (abreviadamente, EDP quase-linear). No caso particular em que (1) tem a forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y). \quad (2)$$

então trata-se de uma EDP *linear*.

Acrescentando a uma EDP quase-linear uma condição inicial prescrita numa *curva inicial*, parametrizada por $(x^0(s), y^0(s))$,

$$u(x^0(s), y^0(s)) = u^0(s),$$

obtém-se um problema de valor inicial (ou de Cauchy).

Uma solução deste *problema de valor inicial* é uma função real $u = u(x, y)$, definida numa vizinhança da curva inicial, $V \subset \mathbb{R}^2$, que satisfaz a equação diferencial e a condição inicial.

Dizemos que uma curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{com } t \in I$$

é uma *curva característica* da equação quase-linear (1) se, em cada ponto de uma solução $u(x, y)$, satisfaz as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \end{cases} \quad (3)$$

Geometricamente, esta definição diz-nos que o campo vectorial (a, b) (calculado em $(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$) é um vector tangente à curva característica, ou seja:

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (a, b).$$

Uma curva diz-se *livre* se não for uma curva característica de (1).

Consideramos agora uma família de condições iniciais dada pela curva inicial

$$\begin{cases} x(0) = x^0(s) \\ y(0) = y^0(s) \end{cases}$$

(uma por cada ponto $(x^0(s), y^0(s))$ da curva inicial). Pelo teorema de Picard, existe uma única solução deste PVI (válida para $t \in (-\alpha, \alpha)$) e que depende (continuamente) de s , a e b , desde que a e b sejam localmente lipschitzianas. Costuma-se representar essas curvas por

$$x(t, s), \quad y(t, s), \quad \text{de classe } C^1,$$

Pela definição acima, $(x(t, s), y(t, s))$ é uma família de curvas características, cada uma delas parametrizada na variável t e com ponto inicial $(x^0(s), y^0(s))$ pertencente à curva inicial.

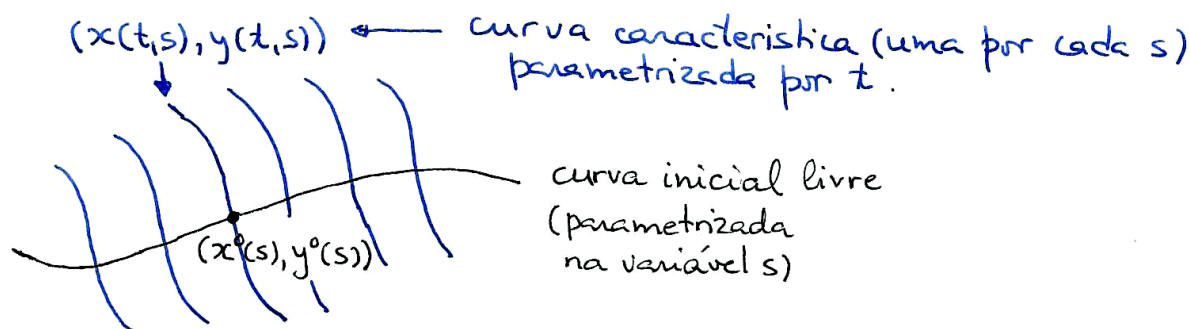


Figura 1: Curva inicial e curvas características partindo de cada ponto $(x^0(s), y^0(s))$ da curva inicial. É crucial que a curva inicial seja livre; caso contrário obteríamos apenas uma (e não todas) as características.

Vejamos, em primeiro lugar, o exemplo da equação das ondas que retrocedem com velocidade $c > 0$:

$$u_y - cu_x = 0.$$

Com a escolha usual da curva inicial, $y = 0$, que parametrizamos por

$$\begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0. \end{cases}$$

o PVI das curvas características, (7), fica:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -c \\ \frac{dy}{dt} = 1 \\ x(0, s) = s, \quad y(0, s) = 0. \end{cases}$$

Para ilustrar a resolução deste tipo de problemas de EDOs calculamos, com todo o detalhe, a solução deste exemplo. Primitivando a primeira equação (note que a “constante” de primitivação depende de s):

$$x = -ct + C(s).$$

Pela condição inicial, $s = x(0, s) = C(s)$. Fazendo o mesmo com a segunda equação, $y = t + D(s)$ e $0 = y(0, s) = D(s)$. Obtivemos assim as soluções

$$\begin{cases} x(t, s) = s - ct \\ y(t, s) = t \end{cases}$$

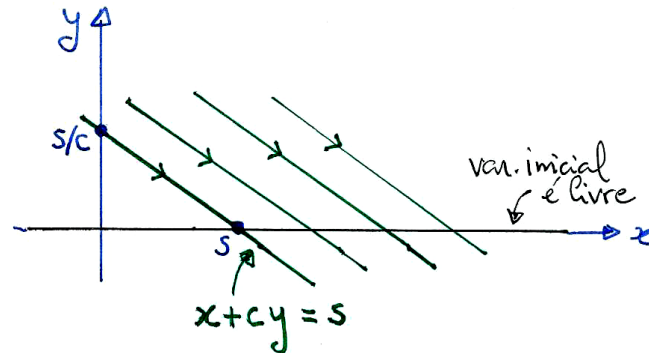


Figura 2: Soluções do PVI das curvas características da equação das ondas que retrocedem.

ou seja, $x + cy = s$. Esta é, precisamente, a equação geral das características da equação das ondas que retrocedem. Note que a curva inicial é não característica.

Para o caso (ainda particular) da equação linear de 1ª ordem, o PVI para as curvas características é, simplesmente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \\ x(0, s) = x^0(s), \quad y(0, s) = y^0(s) \end{cases} \quad \text{para } s \in I,$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Este caso é mais simples de resolver porque estas equações diferenciais são independentes das soluções, u , da EDP. Para cada s , a solução deste sistema de EDOs é uma curva característica (parametrizada na variável t). Quando s toma valores em I , obtém-se uma família de curvas características.

Supondo que $u(x, y)$ é uma solução da equação, ou seja

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y). \quad (4)$$

Pretendemos, por ora, determinar a equação diferencial que u satisfaz ao longo de cada curva característica (i.e., fazendo s constante). Começamos por derivar a função composta

$$\hat{u}(t, s) = u(x(t, s), y(t, s))$$

em ordem a t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_x \underbrace{\frac{dx}{dt}}_a + u_y \underbrace{\frac{dy}{dt}}_b = au_x + bu_y = cu(x(t, s), y(t, s)) + d = c\hat{u} + d.$$

Insistimos que $s \in I$ é o parâmetro que determina a curva característica, em particular, segundo a qual estamos a fazer o cálculo da derivada de u ; dito de outra forma, $\frac{d\hat{u}}{dt}$ é a derivada de u ao longo da característica determinada por um valor (fixo) de s , isto é, $\frac{\partial u}{\partial t}$. Pelo cálculo acima, $\hat{u}$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = c\hat{u} + d \quad \text{com}$$

$$\hat{u}(0, s) = u(x^0(s), y^0(s)) = u^0(s).$$

Então $(x, y, \hat{u})$ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a, & \frac{dy}{dt} = b, & \frac{d\hat{u}}{dt} = c\hat{u} + d \\ (x(0, s), y(0, s), \hat{u}(0, s)) = (x^0(s), y^0(s), u^0(s)) \end{cases}$$

Para o exemplo da equação das ondas que retrocedem, $(x, y, \hat{u})$ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, & \frac{dy}{dt} = -c, & \frac{d\hat{u}}{dt} = 0 \\ (x(0, s), y(0, s), \hat{u}(0, s)) = (s, 0, u^0(s)) \end{cases}$$

Tínhamos entretanto obtido a solução, $x(t, s) = s - ct$ e $y(t, s) = t$, do PVI para as curvas características¹. Para terminar, primitivando a 3ª equação obtemos:

$$u(x(t, s), y(t, s)) = \hat{u}(t, s) = E(s) \quad \Leftrightarrow \quad u(s - ct, t) = E(s).$$

¹No caso linear, o PVI para as curvas características é independente de $\hat{u}$, podendo ser resolvido separadamente, como neste exemplo. Veremos que isto não acontece em geral no caso quase-linear.

Pela condição inicial, $u^0(s) = u(s, 0) = E(s)$; desta forma, e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x = s - ct \\ y = t \end{cases}$$

em ordem a (s, t) , resulta que

$$u(x, y) = u^0(s) = u^0(x + cy).$$

Contudo, importante para as aplicações é o problema recíproco: dada uma solução do sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y), & \frac{dy}{dt} = b(x, y), & \frac{d\hat{u}}{dt} = c\hat{u} + d \\ x(0, s) = x^0(s), & y(0, s) = y^0(s), & \hat{u}(0, s) = u^0(s), \end{cases} \quad \text{para } s \in I,$$

verificar que a função u definida por $u(x(t, s), y(t, s)) = \hat{u}(t, s)$ é uma solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + d(x, y) \\ u(x^0(s), y^0(s)) = u^0(s), \end{cases} \quad \text{para } s \in I. \quad (5)$$

Para poder “propagar” as curvas características para fora da curva inicial, é necessário que o vector tangente à curva inicial e a derivada inicial da solução da EDO das curvas características não tenham a mesma direcção:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} & \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} \\ \frac{dx^0}{ds} & \frac{dy^0}{ds} \end{array} \right| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{cc} a(x^0(s), y^0(s)) & b(x^0(s), y^0(s)) \\ \frac{dx^0}{ds} & \frac{dy^0}{ds} \end{array} \right| \neq 0 \quad \text{para } s \in I.$$

Esta é a *condição de solvabilidade* do problema (5). Geometricamente, esta condição diz que (a, b) (calculado em qualquer ponto da curva inicial) não pode ser um vector tangente à curva inicial. Como vimos, isto é equivalente a dizer que a curva inicial é livre (ou não característica).

Exercício. Encontre um exemplo de um problema do tipo (5) tal que as curvas características da equação diferencial são dadas por $x^2 + y^2 = R^2$ para qualquer $R \in \mathbb{R}^+$, e que tem como solução a função dada por $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Vejamos agora um conjunto de condições suficientes para que o problema recíproco tenha solução. Dado que não é muito mais complicado, iremos considerar o caso quase-linear.

Teorema 1 (Método das Características). *Considere-se o problema*

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ u(x^0(s), y^0(s)) = u^0(s), \quad \text{para } s \in I. \end{cases} \quad (6)$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Admite-se que:

- (a) x^0, y^0, u^0 são de classe C^1 em I e a, b, c são de classe C^1 numa vizinhança de $\{(x^0(s), y^0(s), u^0(s)) : s \in I\}$.
- (b) A curva inicial, parametrizada por $(x^0(s), y^0(s))$ com $s \in I$, é simples.
- (c) A curva inicial é livre, ou seja,

$$\left| \begin{array}{cc} a(x^0(s), y^0(s), u^0(s)) & b(x^0(s), y^0(s), u^0(s)) \\ \frac{dx^0}{ds} & \frac{dy^0}{ds} \end{array} \right| \neq 0 \quad \forall s \in I.$$

Considere-se os sistemas de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u), & \frac{dy}{dt} = b(x, y, u), & \frac{du}{dt} = c(x, y, u) \\ x(0, s) = x^0(s), & y(0, s) = y^0(s), & u(0, s) = u^0(s) \end{cases} \quad \text{para qualquer } s \in I. \quad (7)$$

Então, numa certa vizinhança $O_{\bar{s}}$ de qualquer ponto inicial $(x^0(\bar{s}), y^0(\bar{s}))$, existe uma função $U : O_{\bar{s}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u(t, s) = U(x(t, s), y(t, s)), \quad (8)$$

sendo que U é a única solução de (6) definida numa vizinhança de $(x^0(s), y^0(s))$.

Demonstração. Pela hipótese (a), o teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de uma única solução do problema (7). Por seu turno, considerando um ponto arbitrário da curva inicial, $(x(0, \bar{s}), y(0, \bar{s}))$, a condição não característica (c) diz-nos que, no ponto $(t, s) = (0, \bar{s})$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{dx}{dt}(0, \bar{s}) & \frac{dy}{dt}(0, \bar{s}) \\ \frac{dx}{ds}(0, \bar{s}) & \frac{dy}{ds}(0, \bar{s}) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a(x^0(\bar{s}), y^0(\bar{s}), u^0(\bar{s})) & b(x^0(\bar{s}), y^0(\bar{s}), u^0(\bar{s})) \\ \frac{dx^0}{ds} & \frac{dy^0}{ds} \end{array} \right| \neq 0.$$

²Note que mudamos aqui a notação que temos vindo a usar para algo que, na literatura, é mais usual, e que consiste em representar a solução do sistema de EDOs (7) por u (em vez de $\hat{u}$). Por forma a não a confundir com u , representamos a pretendida solução de (6) por U ; a relação entre u e U é a equação (8).

Isto implica que o jacobiano da função $\phi(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$ verifica

$$\det D\phi = \begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix} \neq 0$$

no ponto $(0, \bar{s})$. Pelo teorema da função inversa existe um difeomorfismo definido numa vizinhança, $O_{\bar{s}}$ do ponto $(0, \bar{s})$.

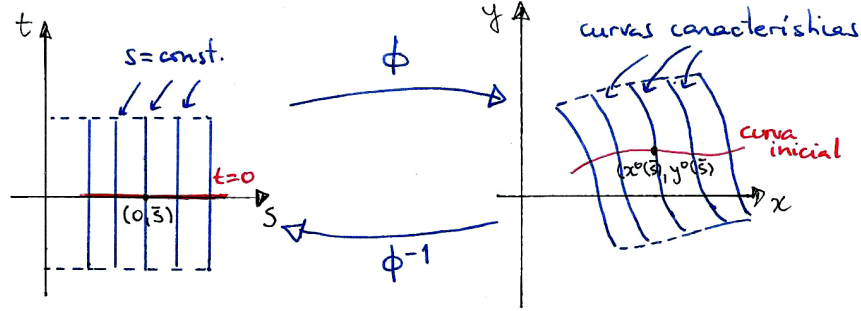


Figura 3: Difeomorfismo transformando $O_{\bar{s}}$, contida no espaço euclidiano dos pontos (t, s) , numa vizinhança de $(x^0(s), y^0(s))$ no espaço euclidiano dos pontos (x, y) .

Este difeomorfismo é a aplicação bijectiva $\phi : O_{\bar{s}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} \phi(t, s) &= (x(t, s), y(t, s)), \\ \phi^{-1}(x, y) &= (T(x, y), S(x, y)), \end{aligned}$$

onde ϕ e ϕ^{-1} são de classe C^1 . De acordo com o pretendido, que é a equação (8), definimos:

$$U(x, y) = u(\phi^{-1}(x, y)) = u(T(x, y), S(x, y)),$$

onde u é a solução do problema de EDOs (7). U está bem definida e é de classe C^1 numa vizinhança de $(x^0(\bar{s}), y^0(\bar{s})) = \phi(0, \bar{s})$.

Vamos agora verificar que U é uma solução do problema da EDP (6). Quanto à condição inicial, tendo em conta que $(x^0(s), y^0(s)) = (x(0, s), y(0, s)) = \phi(0, s)$ e usando a relação $u(t, s) = U(x(t, s), y(t, s))$:

$$U(x^0(s), y^0(s)) = U(\phi(0, s)) = u(0, s) = u^0(s).$$

Quanto à equação diferencial, dado (x, y) numa vizinhança, O_s , da curva inicial tomamos $(t, s) = \phi^{-1}(x, y)$. Desta forma, $(x, y) = \phi(t, s)$, $U(x, y) = u(t, s)$ e

$$\underbrace{a(x, y, U(x, y))}_{x, y, u \text{ calc. em } (t, s)} = \underbrace{a(x, y, u)}_{x, y, u \text{ calc. em } (t, s)} = \frac{dx}{dt}, \quad \underbrace{b(x, y, U(x, y))}_{x, y, u \text{ calc. em } (t, s)} = \underbrace{b(x, y, u)}_{x, y, u \text{ calc. em } (t, s)} = \frac{dy}{dt},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
a(x, y, U)U_x + b(x, y, U)U_y &= \frac{dx}{dt} U_x(x(t, s), y(t, s)) + \frac{dy}{dt} U_y(x(t, s), y(t, s)) \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(U(x(t, s), y(t, s)) \right)}_{= \frac{du}{dt} = c(x, y, u)} \\
&= c(x(t, s), y(t, s), U(x(t, s), y(t, s))) \\
&= c(x, y, U).
\end{aligned}$$

Assim, U satisfaz a equação diferencial numa vizinhança de $(x^0(s), y^0(s))$, para qualquer $s \in I$.

Resta provar a unicidade de solução. Suponhamos que $V(x, y)$ é uma outra solução de (6), definida numa vizinhança de $(x^0(s), y^0(s))$. Então, pelo teorema de Picard-Lindelöf, o PVI (note que a função V é dada e é de classe C^1)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = a(X, Y, V(X, Y)) \\ \frac{dY}{dt} = b(Y, Y, V(X, Y)) \\ X(0, s) = x^0(s), \quad Y(0, s) = y^0(s) \end{cases}$$

tem uma única solução $(X(t, s), Y(t, s))$. Usando o facto de V ser solução de (6), resulta assim que $v(t, s) = V(x(t, s), y(t, s))$ satisfaz:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V_x X_t + V_y Y_t = a(x, y, V) V_x + b(x, y, V) V_y = c(X, Y, V).$$

Assim sendo, (X, Y, v) é outra solução da EDO (7). Além disso,

$$V(X(0, s), Y(0, s)) = V(x^0(s), y^0(s)) = u^0(s),$$

pelo que (X, Y, v) satisfaz as condições iniciais do PVI (7). Por unicidade de solução de (7), $V = U$. $\square$

Vejamos alguns exemplos de aplicação do método das características.

① Considere-se a equação quase-linear

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ x^0(s) = y^0(s) = s \\ u^0(s) = \frac{s}{2}, \end{cases}$$

para $s < 2$. A curva inicial é, pois, $y = x$, com $x \in (-\infty, 2)$.

1º) Verificar que os dados iniciais são não característicos (para qualquer $s < 2$):

$$\begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} u^0(s) & 1 \\ \frac{dx^0}{ds} & \frac{dy^0}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{s}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{s}{2} - 1 \neq 0,$$

para $s < 2$.

2º) Resolver o sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, & \frac{dy}{dt} = 1, & \frac{du}{dt} = 1 \\ x(0, s) = s, & y(0, s) = s, & u(0, s) = \frac{s}{2}, \end{cases} \quad \text{para } s < 2.$$

A solução geral de $\frac{dy}{dt} = 1$ é $y(t, s) = t + C(s)$; pela condição inicial $s = y(0, s) = C(s)$, pelo que

$$y(t, s) = t + s.$$

Identicamente para $\frac{du}{dt} = 1$, $u(t, s) = t + D(s)$ e $\frac{s}{2} = u(0, s) = D(s)$, pelo que:

$$u(t, s) = t + \frac{s}{2}.$$

Finalmente, e substituindo esta última solução na 1ª equação,

$$\frac{dx}{dt} = u = t + \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad x(t, s) = \frac{t^2}{2} + \frac{st}{2} + E(s)$$

Pela condição inicial, $s = x(0, s) = E(s)$. Assim

$$x(t, s) = \frac{t^2}{2} + \frac{st}{2} + s.$$

3º) Como pretendemos obter a solução explícita, vamos resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + st + s \\ y = t + s \end{cases}$$

em ordem a (t, s) , por forma a poder explicitar u em função de (x, y) . A solução deste sistema é

$$\begin{cases} t = \frac{2x-2y}{y-2} \\ s = \frac{y^2-2x}{y-2} \end{cases}$$

A solução é

$$u(x, y) = t + \frac{s}{2} = \frac{x - 2y + y^2/2}{y - 2},$$

sendo válida (pelo menos) numa vizinhança de qualquer segmento de recta compacto contido na curva inicial: $\{(x, x) : -R \leq x \leq 2 - \epsilon\}$, com $\epsilon, R > 0$.

Contudo, para $y < 2$,

$$u_x = \frac{1}{y-2}; \quad u_y = 1 - \frac{x-2y+y^2/2}{(y-2)^2};$$

substituindo u na equação original obtém-se:

$$uu_x + u_y = 1, \quad \text{para } y < 2.$$

A solução obtida é, de facto, válida para $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2\}$.

② Lei de conservação hiperbólica (unidimensional):

$$\begin{cases} a(u)u_x - u_y = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde a e f são funções contínuas. Uma parametrização da curva e da condição inicial pode ser dada por:

$$x^0(s) = s; \quad y^0(s) = 0; \quad u^0(s) = f(s), \quad \text{para } 0 \leq s \leq 1.$$

1º) Verificar que os dados iniciais são não característicos:

$$\begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} a(u) & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

para qualquer $s \in [0, 1]$.

2º) Resolver o sistema de EDOs:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(u), & \frac{dy}{dt} = -1, & \frac{du}{dt} = 0 \\ x(0, s) = s, \quad y(0, s) = 0, \quad u(0, s) = f(s), & \text{para } 0 < s < 1. \end{cases}$$

Integrando a 2ª e a 3ª equações diferenciais entre 0 e t , obtém-se:

$$\begin{aligned} y(t, s) - \underbrace{y(0, s)}_{=y^0(s)=0} &= \int_0^t (-1)ds = -t \quad \Leftrightarrow \quad y(t, s) = -t, \\ u(t, s) - \underbrace{u(0, s)}_{=u^0(s)=f(s)} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(t, s) = f(s). \end{aligned}$$

Substituindo $u(t, s) = f(s)$ na 1ª equação e primitivando, obtém-se:

$$\frac{dx}{dt} = a(f(s)) \quad \Leftrightarrow \quad x(t, s) = a(f(s))t + C(s).$$

Pela condição inicial, $s = x(0, s) = C(s)$, logo

$$x(t, s) = t a(f(s)) + s.$$

3º) Para cada $s \in [0, 1]$, as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} x = t a(f(s)) + s \\ y = -t \end{cases}$$

satisfazem

$$y = \frac{-x + s}{a(f(s))} \quad 0 \leq s \leq 1;$$

ou seja, para cada s , a curva característica (que passa no ponto $(s, 0) = (x^0(s), y^0(s))$) é uma recta de declive $-\frac{1}{a(f(s))}$. Sobre cada uma destas rectas, $u = f(s) = \text{const.}$

Exemplificando com o caso especial $a(u) = u$ e $f(s) = s$, as características são as rectas $y = 1 - \frac{x}{s}$ e $u = s$ sobre cada uma destas rectas.

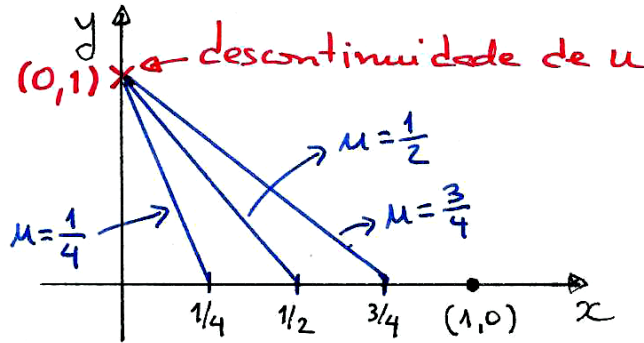


Figura 4: Descontinuidade da solução do problema de valor inicial $uu_x - u_y = 0$, $u(x, 0) = x$.

Verifica-se que $(0, 1)$ é um ponto de descontinuidade de u . Em consequência, a solução não admite extensão a um domínio que contenha $(0, 1)$.

③ **Exercício.** Calcule explicitamente a solução, u , do problema:

$$\begin{cases} uu_x - \frac{1}{2y}u_y = u + 2 \\ x^0(s) = 1 + s, \quad y^0(s) = 1, \quad u^0(s) = s \quad \text{para } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ onde a sua solução é válida.