# Cálculo Diferencial e Integral III

Teste 3

1. Resolva o seguinte problema de Cauchy usando método das características

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} = x^2, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, \frac{1}{2}x) = \frac{1}{6}x^3, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Soluções:**

As curvas características são dadas por $3x + 2y = C$. Podemos usar a transformação de variáveis $v = 3x + 2y$ e $w = 3x - 2y$ verificando que o Jacobiano da transformação é diferente de zero. Então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial v} + 3\frac{\partial u}{\partial w}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial v} - 2\frac{\partial u}{\partial w}$$

que substituindo na equação resulta em

$$12\frac{\partial u}{\partial w} = \left(\frac{v+w}{6}\right)^2$$

e integrando obtem-se

$$u(v,w) = \frac{1}{6^4}(v+w)^3 + f(v)$$

de onde

$$u(x,t) = \frac{x^3}{6} + f(3x+2y).$$

Impondo a condição inicial obtem-se finalmente $u(x,y) = x^3/6$.

2. Considere $f : [-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

e a sua extensão $2\pi$-periódica a $\mathbb{R}$ designada por $\hat{f}$.

(a) Determine a série de Fourier $S[\hat{f}]$ de $\hat{f}$.

(b) Represente graficamente $S[\hat{f}]$. Justifique.

(c) Determine, justificando, o valor de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

**Soluções:**

(a)

$$S[\hat{f}](x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) - \frac{(-1)^2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

(c) Em $x = 0$ a série converge para $f(0)$, logo

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Considere o PVIF para a equação de difusão (problema da condução do calor):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = h(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) Usando o método de separação de variáveis, deduza a solução formal do problema.

(b) Mostre que a função energia $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (u(x,t))^2 dx$ verifica $E'(t) \leq 0$.

(c) Use o resultado anterior para demonstrar a unicidade da solução do problema.

**Soluções:** Veja por exemplo pag. 413, do livro "Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais", P. Girão, IST Press.