Cálculo Diferencial e Integral III

TESTE 3 - SOLUÇÕES

1. Considere $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e resolva as seguintes EDPs:

   (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2u = 0$ (b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y + e^x$

   Resp: (a) $u(x,y) = f(y)e^{2x}$ (b) $u(x,y) = \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}e^x + yf(x) + g(x)$

2. Considere $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e a EDP de 1ª ordem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$$

   (a) Determine as curvas características da EDP e represente-as graficamente.
   (b) Determine a solução geral da EDP.
   (c) Determine a solução que satisfaz a condição $u(t,t) = h(t)$, onde h é uma função dada e $t \in \mathbb{R}$.

   Resp:
   (a) A partir de $\frac{dy}{dx} = -3$ obtem-se a família de retas $3x + y = C$.
   (b) Usando a substituição de variáveis $w = 3x + y$ e $s = 3x - y$ obtem-se:

$$6u_s = \sin\frac{w+s}{6} + \cos\frac{w-s}{2}$$

   que integrando dá

$$u(x,y) = -\cos x - \frac{1}{3}\sin y + f(3x+y).$$

   (c) Impondo a condição dada obtem-se

$$u(x,y) = -\cos x - \frac{1}{3}\sin y + \cos\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3x+y}{4}\right) + h\left(\frac{3x+y}{4}\right)$$

   que realmente verifica $u(t,t) = h(t)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

3. Considere $h :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x(\pi - x)$.

   (a) Determine a série de Fourier de senos de h.

   (b) Represente graficamente a série da alínea anterior. Justifique.

   (c) Resolva o seguinte PVIF para a equação de onda.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Resp:

(a) A série pretendida é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$, com

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx = ... = \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]$$

(b) Uma vez que a extensão ímpar de h, 2π-periódica, é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, a série obtida converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para essa função (cujo gráfico é fácil de representar).

(c) Usando o método da separação de variáveis obtem-se

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nx)\sin(2nt)$$

onde

$$A_n = \frac{b_n}{2n}$$