Cálculo Diferencial e Integral III

MAP 3

1. Resolva o seguinte problema de Cauchy usando método das características

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} = x^2, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, \frac{1}{2}x) = \frac{1}{6}x^3, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Considere $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

   e a sua extensão 2π-periódica a $\mathbb{R}$ designada por $\hat{f}$.

   (a) Determine a série de Fourier $S[\hat{f}]$ de $\hat{f}$.

   (b) Represente graficamente $S[\hat{f}]$. Justifique.

   (c) Determine, justificando, o valor de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

3. Considere o PVIF para a equação de difusão (problema da condução do calor):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = h(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   (a) Usando o método de separação de variáveis, deduza a solução formal do problema.

   (b) Mostre que a função energia $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi (u(x,t))^2 dx$ verifica $E'(t) \le 0$.

   (c) Use o resultado anterior para demonstrar a unicidade da solução do problema.