DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

LEC e LEME, 1º Semestre 2025/26

MAP 2

[8 val.] 1. Considere o sistema de EDOs.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do sistema para $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

(c) Esboce as soluções do sistema no espaço de fase $x\,y$

[6 val.] 2. Considere a equação do oscilador harmónico forçado

$$x'' + 9x = \sin(t) \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente. Justifique.

(b) Determine a solução geral da EDO não-homogénea (1). Justifique.

[6 val.] 3. Considere o problema com condições iniciais

$$x' = (x-1)^{2/3}, \qquad \text{com } x(0) = 1. \tag{2}$$

(a) Mostre que o problem tem um número infinito de soluções.

(b) Explique porque é que o resultado anterior não contradiz o Teorema de Picard-Lindelöf

Soluções:

1. (a) O polinómio característico de A é dado por $p(\lambda) = (3-\lambda)(-2-\lambda)$, logo temos que os seu valores próprios são $\lambda = 3 \vee \lambda = -2$ e A é diagonalizável. Portanto, agora temos de calcular os vetores próprios associados a cada valor. Para $\lambda = 3$,

$$(A-3I)u = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \iff -5u_1 - 5u_2 = 0 \iff u_1 = -u_2.$$

Logo $u = (1,-1)$ é vetor próprio. Para $\lambda = -2$,

$$(A+2I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \iff v_1 = 0.$$

e temos que $v = (0,1)$ é vetor próprio. Definindo

$$S = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos que $A = S\Lambda S^{-1}$ e portanto $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$, como Λ é diagonal

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calculamos agora S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ -e^{3t} + e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(b) A solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{3t} \\ x_0(e^{-2t} - e^{3t}) + y_0 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Outro processo para resolver o exercício:

A solução geral é da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1, λ_2 são os valores próprios de A e $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ os respetivos vetores próprios. Pelos cálculos da alínea anterior obtemos

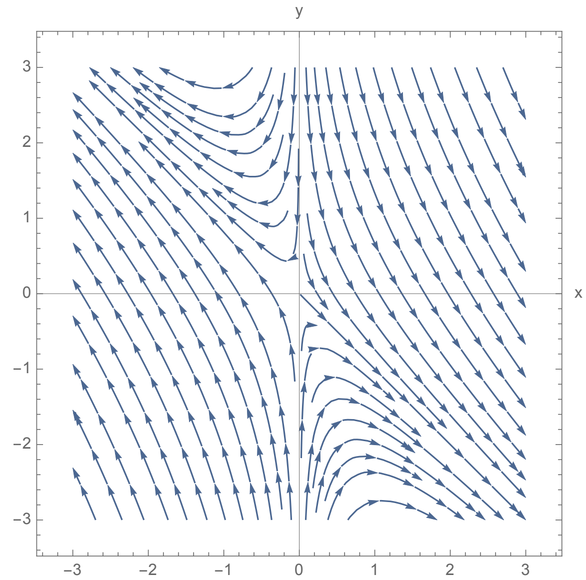
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Condições iniciais: Fazendo $t = 0$,

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ y_0 = -C_1 + C_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ------ \\ y_0 = -x_0 + C_2 \iff C_2 = x_0 + y_0 \end{cases}$$

A solução do PVI é:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x_0 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0) e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



(c)

2. (a) A equação homogénea correspondente é

$$x'' + 9x = 0$$

cujo polinómio característico é $p(r) = r^2 + 9 = 0 \implies r = \pm 3i$. Temos então como funções base $\{\cos(3t), \sin(3t)\}$ (esta funções são linearmente independentes como se pode comprovar calculando $W(\cos(3t), \sin(3t)) \neq 0$) e portanto a solução geral da equação é

$$y_h = A\cos(3t) + B\sin(3t), \qquad \text{para } A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Precisamos de encontrar uma solução particular. O polinómio aniquilador de $\sin(t)$ é $p(D) = D^2 + 1$, cujo os zeros são $\pm i$ e as funções base associadas $\{\cos(t), \sin(t)\}$, por isso uma solução particular é da forma

$$y_p = C\cos(t) + D\sin(t)$$

para alguns $C, D \in \mathbb{R}$. Fazendo as derivadas

$$\begin{aligned} y_p' &= -C\sin(t) + D\cos(t) \\ y_p'' &= -C\cos(t) - D\sin(t) \end{aligned}$$

e subsitituindo na equação

$$-C\cos(t) - D\sin(t) + 9C\cos(t) + 9D\sin(t) = \sin(t)$$

Ficamos com o sistema

$$\begin{cases} 9C - C = 0 \implies C = 0 \\ 9D - D = 1 \implies D = 1/8. \end{cases}$$

Concluimos que a solução geral do sistema não homogéneo é

$$y = y_h + y_p = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \frac{1}{8}\sin(t).$$

3. (a) Trata-se de uma equação separável,

$$\begin{aligned}\frac{x'}{(x-1)^{2/3}} = 1 &\implies \int \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int dt \\ &\iff 3(x-1)^{1/3} = t + C \\ &\iff (x-1)^{1/3} = \frac{t+C}{3} \\ &\implies x = \frac{(t+C)^3}{27} + 1, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Note-se que a solução constante $x(t) = 1$ também é solução do problema dado para todo $t \in \mathbb{R}$. Então podemos construir as soluções (contínuas):

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t < t_0 \\ \dfrac{(t-t_0)^3}{27} + 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

onde $t_0 > 0$ é arbitrário e, por isso, trata-se de um número infinito de soluções. Note-se que as soluções verificam a condição inicial $x(0) = 1$.

(b) O resultado anterior não contradiz o Teorema de Picard-Lindelöf pois a função da equação $x' = f(x,t)$ com $f(x,t) = (x-1)^{2/3}$ é tal que a sua derivada tem um ponto em que não está definida e o seu limite é infinito (logo não é de classe C^1), com efeito,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2}{3(x-1)^{1/3}}$$

e

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{3(x-1)^{1/3}} = \infty.$$