Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2024/25

Teste 2

1. Considere o sistema de EDOs
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{onde} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calcule e^{At} e determine a solução do sistema para $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.
   (b) Esboce as soluções do sistema no espaço de fase x-y.
2. Considere a equação do oscilador harmónico forçado
$$y'' + w^2 y = A \cos(wt)$$
onde $w > 0$ e $A > 0$ são constantes reais e $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente. Justifique.
   (b) Determine a solução geral da EDO não-homogénea (2). Justifique.
   (c) Determine a solução de (2) que verifica $y(0) = y'(0) = 0$ e represente-a graficamente.
3. Considere o problema com condições iniciais
$$y' + 2\sqrt{|y|}\cos(t) = 0, \qquad \text{com} \qquad y(0) = 1.$$
   (a) Mostre que o problema tem um número infinito de soluções.
   (b) Explique porque é que o resultado anterior não contradiz o Teorema de Picard-Lindelöf.

Soluções:

1. Resolvido na aula TP de 21-22/Out/2025, podem ver também as pgs 263-265 do livro "Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais", P. Girão, IST press.

2. Resolvido na aula TP de 19-20/Nov/2025, podem ver também as pgs 295-297 do livro "Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais", P. Girão, IST press.

3(a) A equação é separável. Nos pontos em que $y(t) > 0$ temos então que
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{1/2}} = -2 \int \cos t \, \mathrm{d}t + C$$
para algum $C \in \mathbb{R}$. Calculando as primitivas e rearranjando os termos, segue que $y(t) = (C/2 - \operatorname{sen} t)^2$. Como $y(0) = 1$, vemos que $y(t) = (1 - \operatorname{sen} t)^2$ é uma solução do PVI. Esta função é claramente não-negativa em toda a recta real, e anula-se nos pontos $z_k := \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nesses pontos a derivada também se anula, e por isso a EDO é satisfeita. Para cada $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, defina-se a função
$$y_k(t) = \begin{cases} (1 - \operatorname{sen} t)^2 & \text{se } t < z_k \\ 0 & \text{se } t \geq z_k \end{cases}$$
que é diferenciável em z_k uma vez que $\lim_{h \to 0^-} \frac{y_k(z_k + h) - y_k(z_k)}{h} = 0$. Portanto cada função y_k é diferenciável em $\mathbb{R}$ e satisfaz o PVI. Como cada elemento da família de funções $\{y_k\}_{k \geq 0}$ é distinto, acabámos de construir um número infinito de soluções globais para o PVI.

3(b) A função $f(t, y) := -2\sqrt{|y|}\cos t$ não é localmente Lipschitz relativamente a y em nenhum intervalo que contenha a origem. Caso contrário, teríamos que
$$|f(t, y) - f(t, 0)| \leq L|y - 0|$$
para alguma constante $L < \infty$, o que implicaria $2\sqrt{|y|}|\cos t| \leq L|y|$, o que por sua vez é falso quando $t = 0$ tomando $|y|$ suficientemente pequeno. Deste modo, não estamos em condições de aplicar o teorema de Picard–Lindelöf.