DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

LEC e LEME, 1º Semestre 2025/26

MAP 1

[7 val.] 1. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2 - z^2, \quad x \geq 0\}$.

(a) Faça um esboço das curvas de nível de S com $x = 0$ e $x = 3/4$ e depois esboce S.

(b) Usando o Teorema de Gauss calcule o fluxo exterior do campo vetorial $\vec{\mathbf{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = (x, 2y, z)$ através de S.

[6 val.] 2. Considere o campo vetorial $\vec{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\mathbf{B}}(x, y, z) = (y, x, x^2)$.

(a) Calcule $\nabla \times \vec{\mathbf{B}}$.

(b) Considere o bordo Γ da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0\}$. Use o Teorema de Stokes para calcular a circulação $\oint_\Gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\gamma$.

[7 val.] 3. Considere a seguinte EDO (chamada equação logística)

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x, \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

(a) Usando a substituição de variável $w = \dfrac{1}{x}$, mostre que (1) pode ser escrita na forma

$$\frac{dw}{dt} + aw = b. \tag{2}$$

(b) Resolva a equação (2).

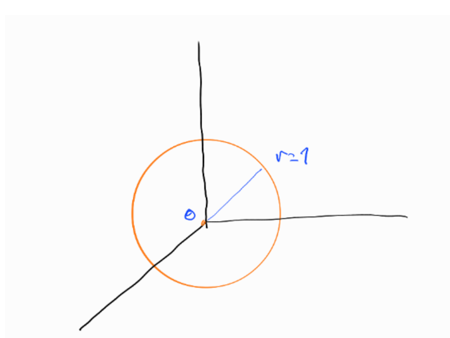
(c) Usando a solução encontrada na alínea anterior, calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} x$ e represente graficamente algumas soluções da equação (1) para $t \geq 0$.

Soluções:

1. (a) Quando $x = 0$, obtemos a equação

$$0 = 1 - y^2 - z^2 \iff y^2 + z^2 = 1.$$

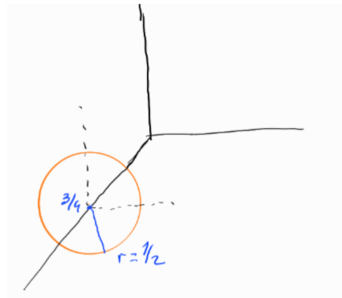
Ou seja, uma circunferência no plano $x = 0$ centrada em $(0, 0, 0)$ com raio 1.



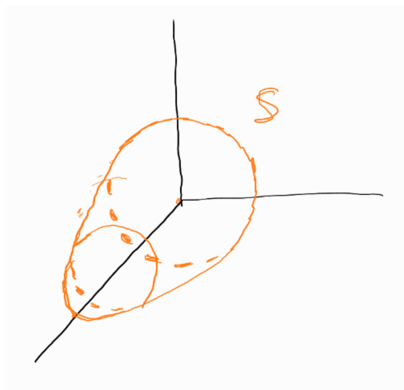
Se $x = 3/4$

$$\frac{3}{4} = 1 - y^2 - z^2 \iff y^2 + z^2 = \frac{1}{4},$$

que é uma circunferência no plano $x = 3/4$ centrada em $(3/4, 0, 0)$ com raio $1/2$.



E portanto desenhamos a superfície S que será um paraboloide à volta do eixo x com altura 1 e base em $x = 0$ com raio 1.



(b) Notamos que S não é uma superfície fechada, por isso introduzimos o conjunto

$$T = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Temos que $\Sigma = S \cup T$ já é fechada e aplicamos o T. de Gauss

$$\int_\Sigma \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = \int_B \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} \, dV$$

onde B é o sólido tal que $\partial B = \Sigma$. Calculamos

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{E_1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E_2}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E_3}}{\partial z} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Usando coordenadas cilíndricas (em torno do eixo x) fazemos o seguinte integral,

$$\begin{aligned}
\int_B \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} \, dV = \int_B 4 \, dV &= 4 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-x}} \rho \, d\rho d\theta dx \\
&= 8\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x}} dx \\
&= 4\pi \int_0^1 1 - x \, dx \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Substituindo acima,

$$\int_\Sigma \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = \int_B \text{div}\,\vec{\mathbf{E}}\, dV = 2\pi \iff \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS + \int_T \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = 2\pi$$
$$\iff \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = 2\pi - \int_T \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS$$

Portanto basta agora calcular o integral do lado direito, ou seja, o fluxo em T. Reparamos que em T a normal exterior é $\nu(x,y,z) = (-1,0,0)$, por isso ficamos com

$$\int_T \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = \int_T (x, 2y, z) \cdot (-1,0,0)\, dS = \int_T -x \, dS = 0,$$

pois $x = 0$ em T. Concluímos que

$$\int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \nu \, dS = 2\pi.$$

2. (a) Calculamos

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & x \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$
$$= 0\mathbf{e}_1 - 2x\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$
$$= (0, -2x, 0).$$

(b) O bordo Γ é dado por

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 4\},$$

e a superfície

$$S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}$$

é também tal que $\partial S' = \Gamma$. Aplicamos então o Teorema de Stokes a S'

$$\oint_\Gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{S'} (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \nu \, dS$$

em S' temos como vetor normal $\nu(x.y,z) = (0,0,1)$ (como o sentido do caminho em Γ não é dado, podemos escolher qualquer orientação para a normal), substituindo ficamos com

$$\oint_\Gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_{S'} (0,-2x,0) \cdot (0,0,1)\, d\nu = \int_{S'} 0 \, dS = 0.$$

3. (a) Como $w = 1/x$, temos que

$$w' = -\frac{x'}{x^2} = -w^2 x' \iff x' = \frac{-w'}{w^2},$$

substituindo na equação ficamos com

$$\frac{-w'}{w^2} = \left(a - b\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w} \iff w' = -aw + b \iff w' + aw = b.$$

(b) Trata-se de uma equação linear, por isso, começamos por calcular o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int a\,dt} = e^{at}$$

Multiplicando a equação por $\mu(t) = e^{at}$ obtemos

$$e^{at}w' + ae^{at}w = be^{a} \iff \frac{d}{dt}(we^{at}) = be^{at} \iff we^{at} = \int be^{at}\,dt \iff we^{at} = \frac{b}{a}e^{at} + C$$

$$\iff w = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

para $C \in \mathbb{R}$.

(c) Substituindo acima de volta $w = 1/x$, obtemos

$$x = \frac{1}{b/a + Ce^{-at}}, \qquad \text{para } C \in \mathbb{R}.$$

Fazendo o limite

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{b/a + Ce^{-at}} = \frac{1}{b/a + 0} = \frac{a}{b}.$$

Algumas soluções são representadas em seguida: