Cálculo Diferencial e Integral III

LEC e LEME, 1º Semestre 2025/26

MAP 1

[7 val.] 1. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2 - z^2, \quad x \geq 0\}$.

(a) Faça um esboço das curvas de nível de S com $x = 0$ e $x = 3/4$ e depois esboce S.

(b) Usando o Teorema de Gauss calcule o fluxo exterior do campo vetorial $\vec{\mathbf{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = (x, 2y, z)$ através de S.

[6 val.] 2. Considere o campo vetorial $\vec{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{\mathbf{B}}(x, y, z) = (y, x, x^2)$.

(a) Calcule $\nabla \times \vec{\mathbf{B}}$.

(b) Considere o bordo Γ da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0\}$. Use o Teorema de Stokes para calcular a circulação $\oint_\Gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot d\gamma$.

[7 val.] 3. Considere a seguinte EDO (chamada equação logística)

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x, \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

(a) Usando a substituição de variável $w = \dfrac{1}{x}$, mostre que (1) pode ser escrita na forma

$$\frac{dw}{dt} + aw = b. \tag{2}$$

(b) Resolva a equação (2).

(c) Usando a solução encontrada na alínea anterior, calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} x$ e represente graficamente algumas soluções da equação (1) para $t \geq 0$.