Cálculo Diferencial e Integral III

TESTE 1

1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ a curva dada pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 1$. Considere o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, 0, y)$.

   (a) Escolha uma orientação para Γ e, usando uma parametrização γ correspondente, calcule a circulação $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathsf{d}\gamma$.

   (b) Determine uma superfície S com fronteira $\partial S = \Gamma$ e, usando o Teorema de Stokes, confirme a resposta que obteve na alínea anterior.

2. Considere o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + e^z, y + 2, z + \operatorname{sen}(xy))$ e a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2 = \sqrt{x^2 + z^2}, 0 < y < 2\}$.

   (a) Represente graficamente a superfície S.

   (b) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S na direcção exterior, usando o Teorema da Divergência.

3. Considere a EDO de 1ª ordem não-linear $y' = \dfrac{t^4 + 2y^4}{ty^3}$.

   (a) Determine a solução geral da equação fazendo a substituição de variável $z = \dfrac{y}{t}$.

   (b) Calcule a solução da equação que verifica $y(1) = 1$ e indique o intervalo aberto maximal onde está definida a solução.

Soluções:

1. (a) A curva Γ pode ser parametrizada por $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, orientada no sentido anti-horário se vista de cima. Então $\mathsf{d}x = -\sin\theta\, \mathsf{d}\theta$, $\mathsf{d}y = \cos\theta\, \mathsf{d}\theta$, $\mathsf{d}z = 0$, e portanto

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathsf{d}\gamma = \int_0^{2\pi} (1 - \sin\theta)(-\sin\theta)\, \mathsf{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, \mathsf{d}\theta = \pi,$$

   uma vez que as médias de $\sin\theta$ e de $\sin^2\theta$ são 0 e $\frac{1}{2}$, respectivamente.

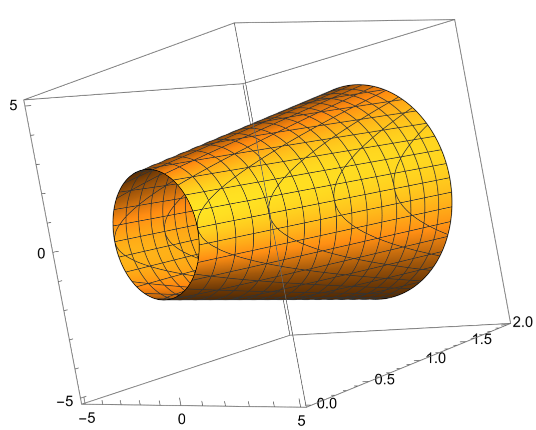
   (b) Seja S o disco $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$. Então $\nu = (0, 0, 1)$, e uma vez que as condições do Teorema de Stokes são satisfeitas ($\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e S é uma superfície orientável com orientação compatível com a de $\Gamma = \partial S$), temos que

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathsf{d}\gamma = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \nu\, \mathsf{d}S = \int_S (1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)\, \mathsf{d}S = \mathsf{vol}_2(S) = \pi,$$

   em concordância com a alínea (a). Na segunda igualdade usámos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathsf{i}} & \hat{\mathsf{j}} & \hat{\mathsf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & 0 & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

2. (a) Representação gráfica da superfície S:



(b) Seja $S_0 := \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < 2^2\}$ e $S_2 := \{(x,2,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < 4^2\}$, e $E \subset \mathbb{R}^3$ o domínio limitado com fronteira igual a $S \cup S_0 \cup S_2$. Então, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S + \int_{S_0} \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_E \mathrm{div}\mathbf{F} \, \mathrm{d}V, \tag{1}$$

onde ν é a normal exterior em S, e $\nu = (0,-1,0)$ em S_0, e $\nu = (0,1,0)$ em S_2. Uma vez que div$\mathbf{F} = 3$, o lado direito de (1) é igual a

$$\int_E \mathrm{div}\mathbf{F} \, \mathrm{d}V = 3\mathrm{Vol}_3(E) = 3\frac{\pi}{3}(4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 2^2) = 56\pi. \tag{2}$$

Para calcular o lado esquerdo de (1), note-se que

$$\int_{S_0} \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_{S_0} (*, y+2, *) \cdot (0,-1,0) \, \mathrm{d}S = -2\mathrm{Vol}_2(S_0) = -2(\pi 2^2) = -8\pi, \tag{3}$$

uma vez que $y = 0$ em S_0. De modo análogo, uma vez que $y = 2$ em S_2,

$$\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_{S_2} (*, y+2, *) \cdot (0,1,0) \, \mathrm{d}S = 4\mathrm{Vol}_2(S_2) = 4(\pi 4^2) = 64\pi. \tag{4}$$

Substituindo (2), (3), (4) em (1), temos finalmente que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, \mathrm{d}S = 0.$$

3. (a) Sendo $tz = y$, então $z + tz' = y'$. Por outro lado

$$y' = \frac{t^4 + 2y^4}{ty^3} = \left(\frac{t}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{t}\right)$$

de onde se obtem a equação

$$z + tz' = z^{-3} + 2z$$

e depois a EDO separável

$$\frac{z^3 z'}{1+z^4} = \frac{1}{t}.$$

Por integração temos a *solução geral* $y(t) = \pm t\sqrt[4]{ct^4 - 1}$.

(b) De $y(1) = 1$ obtem-se $c = 2$. Logo a *solução particular* que verifica a condição inicial dada é $y(t) = t\sqrt{2t^4 - 1}$. Considerando a parte do domínio desta solução que contem $t = 1$ obtemos $I_{max} = \left]\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$.