

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [3a.1], [3a.2], [3a.3]

[3a] Considere uma equação  $f(x) = 0$  onde  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução  $z$  da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução  $z$  usando o **método de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3a.1] (1)  $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2)  $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3a.2] (1)  $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2)  $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3a.3] (1)  $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2)  $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [3b.1], [3b.2], [3b.3]

[3b] Considere uma equação  $f(x) = 0$  onde  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução  $z$  da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução  $z$  usando o **método da secante**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3b.1] (1)  $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2)  $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3b.2] (1)  $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2)  $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3b.3] (1)  $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2)  $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [3c.1], [3c.2], [3c.3]

[3c] Considere uma equação  $f(x) = 0$  onde  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução  $z$  da equação. Escreva um programa para calcular valores aproximados da solução  $z$  usando o **método de Stephensen**,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{[f(x_m)]^2}{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x_0 \text{ dado}$$

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3c.1] (1)  $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2)  $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3c.2] (1)  $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2)  $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

[3c.3] (1)  $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2)  $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função  $f$  à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [4a.1], [4a.2], [4a.3], [4a.4]

[4a] Considere um sistema de equações lineares  $Ax = b$ , onde  $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$ ,  $A$  não singular, e  $b \in \mathbb{R}^d$  são dados,  $d \geq 2$ . Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única  $z$  deste sistema usando o **método de Jacobi modificado** ou **método JOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

$$[4a.1] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -9 \\ 0 & -9 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4a.2] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 5 \\ -10 & -3 & -10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ -23 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

continua

$$[4a.3] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 19 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4a.4] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) um sistema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [4b.1], [4b.2], [4b.3], [4b.4]

[4b] Considere um sistema de equações lineares  $Ax = b$ , onde  $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$ ,  $A$  não singular, e  $b \in \mathbb{R}^d$  são dados,  $d \geq 2$ . Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única  $z$  deste sistema usando o **método de Gauss-Seidel modificado** ou **método SOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

$$[4b.1] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -9 \\ 0 & -9 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4b.2] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 5 \\ -10 & -3 & -10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ -23 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

continua

$$[4b.3] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 19 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4b.4] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) um sistema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [5a.1], [5a.2], [5a.3], [5a.4]

[5a] Considere um sistema de equações  $f(x) = 0$  onde  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução  $z$  do sistema e tal que a sua matriz Jacobiana é invertível em  $z$ . Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução  $z$  usando o **método de Newton generalizado**. Use o **método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot** para resolver o sistema linear que determina a diferença de duas iteradas sucessivas do método de Newton.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas não-lineares:

$$[5a.1] \quad (1) \quad \begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2^3 - 9 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

(3) uma sistema à sua escolha.

$$[5a.2] \quad (1) \quad \begin{cases} 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 6x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) - \log(2\pi) + 1 = 0 \\ 4x_1^2 - 4x_1 + 8x_2^2 - 15 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

continua



[5a.3] (1) 
$$\begin{cases} x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_1x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_3x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

[5a.4] (1) 
$$\begin{cases} x_1^4 - 12x_1^2x_2^2 + 4x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 8x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} x_1x_2 - x_3^2 + 3 = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro dos valores aproximados obtidos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [6a.1], [6a.2], [6a.3]

[6a] Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_N$ ,  $N + 1$  pontos distintos do intervalo  $[a, b]$  e sejam  $f_0, f_1, \dots, f_N$  os correspondentes valores de uma função  $f$  nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de  $f$  nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Lagrange**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6a.1] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = 5 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = -5 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6a.2] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = 3 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = -3 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6a.3] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = 2 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^6}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,       $x_k = -2 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,       $f(x) = \frac{1}{1 + x^6}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [6b.1], [6b.2], [6b.3]

[6b] Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_N$ ,  $N + 1$  pontos distintos do intervalo  $[a, b]$  e sejam  $f_0, f_1, \dots, f_N$  os correspondentes valores de uma função  $f$  nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de  $f$  nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6b.1] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = 5 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = -5 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6b.2] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = 3 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = -3 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6b.3] (1)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = 2 \left( -1 + \frac{2k}{N} \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^6}$

(2)  $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$ ,  $x_k = -2 \cos \left( \frac{2k + 1}{2N + 2} \pi \right)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1 + x^6}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [7a.1], [7a.2], [7a.3]

[7a] Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_N$ ,  $N + 1$  pontos distintos do intervalo  $[a, b]$  e sejam  $f_0, f_1, \dots, f_N$  os correspondentes valores de uma função  $f$  nesses pontos. Escreva um programa para obter o polinómio de grau menor ou igual a  $n$ , sendo  $n \leq N$ , que constitui a **melhor aproximação mínimos quadrados discreta** de  $f$  nos pontos dados. Utilize o **método de eliminação de Gauss** para resolver o sistema normal.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[7a.1] (1) { (4.0, 102.56), (4.2, 113.18), (4.5, 130.11), (4.7, 142.05),  
(5.1, 167.53), (5.5, 195.14), (5.9, 224.87), (6.3, 256.73),  
(6.8, 299.50), (7.1, 326.72) }

(2) { (0.00, 0.872740), (0.05, 1.16988), (0.10, 0.913756), (0.15, 0.876550),  
(0.20, 0.938130), (0.25, 1.06479), (0.30, 1.18807), (0.35, 1.07725),  
(0.40, 1.20431), (0.45, 1.33526), (0.50, 1.19192), (0.55, 1.32128),  
(0.60, 1.36179), (0.65, 1.48189), (0.70, 1.66238), (0.75, 1.44720),  
(0.80, 1.46947), (0.85, 1.65419), (0.90, 1.69708), (0.95, 1.88074),  
(1.00, 2.16617) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[7a.2] (1) { (0.00, 0.486), (0.05, 0.866), (0.10, 0.944), (0.15, 1.144),  
(0.20, 1.103), (0.25, 1.202), (0.30, 1.166), (0.35, 1.191),  
(0.40, 1.124), (0.45, 1.095), (0.50, 1.122), (0.55, 1.102),  
(0.60, 1.099), (0.65, 1.017), (0.70, 1.111), (0.75, 1.117),  
(0.80, 1.152), (0.85, 1.265), (0.90, 1.380), (0.95, 1.575),  
(1.00, 1.857) }

(2) { (0.0, 2.03364), (0.1, 2.07461), (0.2, 1.76509), (0.3, 1.70568),  
(0.4, 1.69930), (0.5, 1.55382), (0.6, 1.46953), (0.7, 1.25615),  
(0.8, 1.33597), (0.9, 0.94252), (1.0, 0.873378), (1.1, 1.06954),  
(1.2, 1.13408), (1.3, 1.27233), (1.4, 1.32770), (1.5, 1.58530),  
(1.6, 1.70647), (1.7, 1.56329), (1.8, 1.81244), (1.9, 1.85916),  
(2.0, 2.08769) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

continua

[7a.3] (1) { (0.00, 0.4910), (0.05, 0.5362), (0.10, 0.5856), (0.15, 0.6774),  
(0.20, 0.6136), (0.25, 0.6829), (0.30, 0.7135), (0.35, 0.7520),  
(0.40, 0.7838), (0.45, 0.7685), (0.50, 0.7141), (0.55, 0.7603),  
(0.60, 0.7572), (0.65, 0.7358), (0.70, 0.6678), (0.75, 0.6812),  
(0.80, 0.6796), (0.85, 0.6669), (0.90, 0.6353), (0.95, 0.5862),  
(1.00, 0.4613) }

(2) { (0.00, 1.02510), (0.05, 0.891960), (0.10, 0.959876), (0.15, 0.929897),  
(0.20, 1.11034), (0.25, 0.930305), (0.30, 0.916617), (0.35, 1.04574),  
(0.40, 1.14783), (0.45, 1.13681), (0.50, 1.26505), (0.55, 1.25428),  
(0.60, 1.11711), (0.65, 1.14717), (0.70, 1.39232), (0.75, 1.29891),  
(0.80, 1.57156), (0.85, 1.74427), (0.90, 1.60858), (0.95, 1.98931),  
(1.00, 1.85503) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro quadrático; variação dos resultados com o grau do polinómio aproximador.**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**  
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [8a.1], [8a.2]

[8a] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 2 composta** com  $M$  sub-intervalos, onde  $M$  é um número par;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com  $M'$  sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8a.1] (1)  $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2)  $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8a.2] (1)  $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2)  $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**  
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**  
**Ano Lectivo: 2009/2010    Semestre: 2<sup>o</sup>**

**TCCC – Exercícios [8b.1], [8b.2]**

[8b] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 3 composta** com  $M$  sub-intervalos, onde  $M$  é um número múltiplo de 3;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com  $M'$  sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8b.1] (1)  $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2)  $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8b.2] (1)  $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2)  $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**  
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**  
**Ano Lectivo: 2009/2010    Semestre: 2<sup>o</sup>**

**TCCC – Exercícios [8c.1], [8c.2]**

[8c] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4 composta** com  $M$  sub-intervalos, onde  $M$  é um número múltiplo de 4;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com  $M'$  sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8c.1] (1)  $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2)  $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8c.2] (1)  $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2)  $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.**



**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**  
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [8d.1], [8d.2]

[8d] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 5 composta** com  $M$  sub-intervalos, onde  $M$  é um número múltiplo de 5;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com  $M'$  sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8d.1] (1)  $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2)  $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8d.2] (1)  $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2)  $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**  
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [8e.1], [8e.2]

[8e] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 6 composta** com  $M$  sub-intervalos, onde  $M$  é um número múltiplo de 6;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com  $M'$  sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8e.1] (1)  $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2)  $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8e.2] (1)  $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2)  $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

## TCCC – Exercícios [10a.1], [10a.2]

[10a] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e  $(x_0, Y_0) \in D$ . Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 3<sup>a</sup> ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10a.1] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10a.2] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

## TCCC – Exercícios [10b.1], [10b.2]

[10b] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e  $(x_0, Y_0) \in D$ . Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Nystrom de 3<sup>a</sup> ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10b.1] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10b.2] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

## TCCC – Exercícios [10c.1], [10c.2]

[10c] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e  $(x_0, Y_0) \in D$ . Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 4<sup>a</sup> ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10c.1] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10c.2] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

## TCCC – Exercícios [10d.1], [10d.2]

[10d] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e  $(x_0, Y_0) \in D$ . Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Gill de 4<sup>a</sup> ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10d.1] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10d.2] (1) 
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.**

# MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Ano Lectivo: 2009/2010      Semestre: 2<sup>o</sup>

TCCC – Exercícios [10e.1], [10e.2]

[10e] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e  $(x_0, Y_0) \in D$ . Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Merson de 4<sup>a</sup> ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10e.1] (1)  $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

[10e.2] (1)  $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

**Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.**