INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 17 de Julho de 2010

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1][20] Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor da função $f : \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$, num ponto x do seu domínio:

$$z_1 = 1 - x, \qquad z_2 = 1 + x, \qquad z_3 = \frac{1}{z_1}, \qquad z_4 = \frac{1}{z_2}, \qquad z = f(x) = z_3 - z_4.$$

Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as cinco operações aritméticas envolvidas no cálculo de z têm erros de arredondamento $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize o resultado para analisar a estabilidade do problema e a estabilidade numérica do algoritmo.

[2] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - \rho\cos(x_1 - x_2) \\ x_2 - \rho + \rho\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \rho\cos(x_1 - x_2) \\ \rho - \rho\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}.$$

onde $0 < \rho < \frac{1}{2}$.

(a)[15] Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = [-1,1] \times [-1,1],$$

e que esta é também a única solução de (S) em $\mathbb{R}^2$.

(b)[15] Tome $\rho = \frac{1}{3}$. Calcule uma iterada do método do ponto fixo com função iteradora g e condição inicial $x^{(0)} = [0 \ \ 0]^T$ e utilize o resultado para determinar qual o número mínimo de iteradas do referido método que seriam necessárias para obter uma aproximação da solução do sistema (S) com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(c)[15] Tome $\rho = \frac{1}{3}$. Determine um valor aproximado da solução do sistema (S) usando uma iterada do método de Newton generalizado com condição inicial $x^{(0)} = \left[\frac{\pi}{8} \ \ \frac{\pi}{8}\right]^T$.

[3][20] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz simétrica definida positiva. Mostre que é condição necessária e suficiente para que o método SOR convirja para a solução do sistema que o parâmetro de relaxação ω satisfaça a $\omega \in]0, 2[$.

v.s.f.f.

[4] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f definida e contínua em $\mathbb{R}$ e monótona no intervalo $[1,4]$:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-2	-1	1	3

(a)[20] Mostre que o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela tem a forma

$$p_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - \frac{7x}{3} - 1.$$

Use a fórmula de Newton às diferenças divididas.

(b)[15] Determine um valor aproximado do zero da função f no intervalo $[2,3]$ calculando o zero do polinómio p_3 nesse intervalo usando duas iteradas do método da secante com valores iniciais $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

(c)[15] Determine um valor aproximado do zero da função f no intervalo $[2,3]$ usando o polinómio interpolador da função inversa de f nos pontos da tabela. Use a fórmula de interpolação de Lagrange.

[5] Considere o integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\cos x}\, dx.$$

(a)[10] Determine um valor aproximado do integral usando a fórmula de Gauss-Legendre de ordem 2.

(b)[15] Determine o número mínimo de sub-intervalos que seria necessário utilizar para calcular o integral pela fórmula de Gauss-Legendre composta de ordem 2 com um erro inferior a 10^{-6}. Nota. Pode utilizar a tabela:

n	2	4	6	8	10
$\max_{x\in[-1,1]} \left\lvert \frac{d^n}{dx^n} e^{\cos x} \right\rvert$	e	$4e$	$31e$	$379e$	$6556e$

[6] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + x^2 y'(x) + y(x) = 0, & x \geq 2, \\ y(2) = 4, \quad y'(2) = 3. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados y_1 e z_1 para $y(2+h)$ e $y'(2+h)$, respectivamente, onde $h > 0$ é o passo de integração:

(a)[20] pelo método de Euler modificado;

(b)[20] pelo método de Adams-Moulton de ordem de consistência 2 ($p = 0$, $q = 2$).

$\boxed{\text{17.JUL.2010}}$