INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 28 de Junho de 2010

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere a função

$$g_\mu : [0,\pi] \to [0,\pi], \qquad g_\mu(x) = \mu \sin(x), \qquad \frac{\pi}{2} < \mu < \pi.$$

(a)^{10} Mostre que g_μ tem um único ponto fixo $z_\mu \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

(b)^{20} Mostre que existe um único valor de μ, μ_b, tal que a sucessão

$$x_{n+1} = g_\mu(x_n), \qquad n \geq 0,$$

converge pelo menos localmente para z_μ para $\mu < \mu_b$ e não converge para $\mu > \mu_b$.

(c)^{20} Determine o valor de z_{μ_b} com um erro absoluto inferior 10^{-2} usando o método de Newton. Caso não tenha feito a alínea anterior determine a raiz da equação

$$z + \tan(z) = 0,$$

no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, com a precisão e pelo método indicados.

[**2**] Suponha que utiliza o método iterativo,

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \omega\left(b - Ax^{(n)}\right), \qquad n \geq 0,$$

com $\omega \in \mathbb{R}$, para resolver o sistema linear $Ax = b$, $A \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2$, no caso em que A tem valores próprios complexos conjugados, $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Determine:

(a)^{15} o intervalo de valores de ω para os quais o método converge para qualquer valor inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$;

(b)^{15} o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[**3**] Pretende aproximar-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(x^2)$ no intervalo $[0,1]$ por uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $\phi(x) = a + bx^3$ onde a, b são escolhidos por forma a minimizar o integral

$$E(a,b) = \int_0^1 [f(x) - \phi(x)]^2 \, dx.$$

(a)[15] Mostre que os valores a^*, b^* que minimizam $E(a,b)$ são as componentes do vector y, solução do sistema linear $Ay = w$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x)\,dx \\ \int_0^1 x^3 f(x)\,dx \end{bmatrix}.$$

(b)[20] Determine valores aproximados $\tilde{w}_1$ e $\tilde{w}_2$ para os integrais w_1 e w_2 usando a fórmula dos trapézios composta com 4 subintervalos e obtenha majorantes dos erros absolutos $|w_1 - \tilde{w}_1|$ e $|w_2 - \tilde{w}_2|$.

(c)[25] Sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.250 \\ 0.250 & 0.143 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{w} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix},$$

obtenha um majorante do erro relativo da solução $\tilde{y}$ do sistema $\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{w}$ em relação à solução y do sistema $Ay = w$. Use a norma do máximo e a norma matricial associada. Não resolva qualquer dos sistemas. Caso não tenha feito a alínea anterior tome

$$\tilde{w}_1 = 1.49, \qquad |w_1 - \tilde{w}_1| \le 0.0850, \qquad \tilde{w}_2 = 0.569, \qquad |w_2 - \tilde{w}_2| \le 0.340.$$

[4][20] Demonstre a fórmula do erro de integração para o método de Simpson:

$$E_2(f) := I(f) - I_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[, \qquad f \in C^4([a,b]).$$

Pode usar o resultado:

$$\int_a^b x(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^5}{120}.$$

[5] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{1}{x}\,y'(x) + e^{y(x)} = 0, & x \ge 1, \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados y_1 e z_1 para $y(1+h)$ e $y'(1+h)$, respectivamente, onde $h > 0$ é o passo de integração:

(a)[20] pelo método de Taylor de ordem 2;

(b)[20] pelo método de Heun.

$\boxed{\text{28.JUN.2010}}$