**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**
**Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL**

**<u>Resolução do Exame de 28 de Junho de 2010</u>**

**[1]**
**(a)**$^{10}$

$g_\mu$ tem um único ponto fixo $z_\mu$ em $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[ =: I$

$\Leftrightarrow \quad h_\mu, \; h_\mu(x) = g_\mu(x) - x, \;$ tem um único zero em $I$

Esta segunda proposição é uma consequência do teorema do valor intermédio de Bolzano e do teorema de Rolle, pois:

$$h_\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mu - \frac{\pi}{2} > 0, \qquad h_\mu(\pi) = -\pi < 0$$

$$h'_\mu(x) = \mu\cos(x) - 1 < 0, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

**(b)**$^{20}$

Sendo $g \in C^1(V_{z_\mu})$, onde $V_{z_\mu}$ é uma vizinhança de $z_\mu$, então:

(i) a sucessão converge para $z_\mu$ se $|g'_\mu(z_\mu)| < 1$
para $x_0$ suficientemente perto de $z_\mu$;

(ii) a sucessão não pode convergir para $z_\mu$ se $|g'_\mu(z_\mu)| > 1$
(excepto se "excepcionalmente" $x_k = z_\mu$ para algum $k$).

Conclui-se portanto que o valor de $\mu$, $\mu_b$, tal que

$$|g'_{\mu_b}(z_{\mu_b})| = -g'_{\mu_b}(z_{\mu_b}) = 1$$

onde $z_{\mu_b}$ satisfaz à equação

$$g_{\mu_b}(z_{\mu_b}) = z_{\mu_b}$$

é o valor pretendido. Este sistema de equações pode escrever-se:

$$\begin{cases} \mu_b \sin(z_{\mu_b}) = z_{\mu_b} \\ \mu_b \cos(z_{\mu_b}) = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z_{\mu_b} + \tan(z_{\mu_b}) = 0 \\ \mu_b = \sqrt{1 + z_{\mu_b}^2} \end{cases}$$

Para concluir que este valor existe e é único basta mostrar que a função

$f(z) = z + \tan(z)$

tem uma única raiz no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon, \pi\right]$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Este resultado é uma consequência dos teoremas do valor intermédio e de Rolle:

$f\left(\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) < 0, \qquad f(\pi) = \pi > 0$

$f'(z) = 2 + \tan^2(z) > 0, \qquad \forall z \in \left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon, \pi\right]$

**(c)**[20]

Determinação da raiz $z_{\mu_b}$ da equação $f(z) = 0$ em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$:

$f(z) = z + \tan(z)$

Escolha do sub-intervalo que contém a raiz: $I = [2.0, 2.1]$

Condições suficientes de convergência do método de Newton $\forall z_0 \in I$:

(0) $f \in C^2(I)$

(i) $f(2.0)\, f(2.1) < 0$

(ii) $f'(z) = 2 + \tan^2(z) > 0, \;\; \forall z \in I$

(iii) $f''(z) = 2\tan(z)\,(1 + \tan^2(z)) < 0, \;\; \forall z \in I$

(iv) $\left|\dfrac{f(2.0)}{f'(2.0)}\right| = 0.0273 < 0.1, \qquad \left|\dfrac{f(2.1)}{f'(2.1)}\right| = 0.0792 < 0.1$

Método de Newton:

$$z_m = z_{m-1} - \frac{f(z_{m-1})}{f'(z_{m-1})}, \qquad m \geq 1$$

$$|z_{\mu_b} - z_m| \leq \frac{1}{K}\,(K\,|z_{\mu_b} - z_0|)^{2^m} =: B_m, \qquad K = \frac{\max_{z\in I}|f''(z)|}{2\min_{z\in I}|f'(z)|}$$

$$\left.\begin{aligned} &\min_{z\in I}|f'(z)| = |f'(2.1)| = 4.92358 \\ &\max_{z\in I}|f''(z)| = |f''(2.0)| = 25.2346 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; K = 2.56263$$

$z_0 = 2.0 \qquad |z_{\mu_b} - z_0| \leq 0.1$

$$K\,|z_{\mu_b} - z_0| \le 0.256263 < 1$$

| $m$ | $x_m$ | $B_m$ |
|---|---|---|
| 0 | 2.0 | 0.1 |
| 1 | 2.02731 | 0.0256 |
| 2 | 2.02875 | 0.00168 |

$$z_{\mu_b} = 2.02875 \pm \varepsilon, \qquad 0.0 \le \varepsilon \le 0.00168.$$

**[2]**

**(a)**[15]

Condição de convergência: $r_\sigma(C(\omega)) < 1, \qquad C(\omega) = I - \omega A$

$$\det(C(\omega) - \lambda I) = \det((1-\lambda)I - \omega A) = \omega^2 \det\left(A - \frac{1-\lambda}{\omega}\, I\right) = 0$$

$$\frac{1-\lambda_{1,2}}{\omega} = \alpha \pm i\beta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 - \omega\alpha \mp i\omega\beta$$

$$r_\sigma(C(\omega)) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \left[(1-\omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2\right]^{1/2} = \left[(\alpha^2+\beta^2)\omega^2 - 2\alpha\omega + 1\right]^{1/2}$$

$$r_\sigma(C(\omega)) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega\left[(\alpha^2+\beta^2)\omega - 2\alpha\right] < 0$$

$$\text{O método converge para} \quad \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2} < \omega < 0, & \text{se } \alpha < 0 \\ 0 < \omega < \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

**(b)**[15]

O método converge mais rapidamente para o valor de $\omega$, $\omega_{\text{opt}}$,

para o qual $r(\omega) := r_\sigma(C(\omega))$ é mínimo.

$$r'(\omega) = \frac{\omega(\alpha^2+\beta^2) - \alpha}{r(\omega)}$$

$$r'(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} =: \omega_{\text{opt}}$$

$$r''(\omega) = \frac{\alpha^2+\beta^2}{r(\omega)} - \frac{\left[\omega(\alpha^2+\beta^2) - \alpha\right]^2}{[r(\omega)]^3}, \qquad r''(\omega_{\text{opt}}) = \frac{\alpha^2+\beta^2}{r(\omega_{\text{opt}})} > 0$$

**[3]**

**(a)**[15]

Melhor aproximação mínimos quadrados:

$$\phi^*(x) = a^*\phi_0(x) + b^*\phi_1(x), \qquad \phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x^3$$

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^1 \phi(x)\psi(x)\, dx, \qquad \forall \phi, \psi \in C([0,1])$$

$$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \int_0^1 dx = 1$$

$$\langle \phi_0, \phi_1 \rangle = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$$

$$\langle \phi_1, \phi_0 \rangle = \langle \phi_0, \phi_1 \rangle = \frac{1}{4}$$

$$\langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_0^1 x^6\, dx = \frac{1}{7}$$

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_0^1 f(x)\, dx$$

$$\langle f, \phi_1 \rangle = \int_0^1 x^3 f(x)\, dx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x)\, dx \\ \int_0^1 x^3 f(x)\, dx \end{bmatrix}$$

**(b)**[20]

Fórmula dos trapézios composta ($f \in C([a,b])$):

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx, \;\approx\; I_1^{(M)}(f) = \frac{h_M}{2}\left[ f(x_0) + f(x_M) + 2\sum_{j=1}^{M-1} f(x_j) \right]$$

$$h_M = \frac{b-a}{M}, \qquad x_j = a + j h_M, \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

$$M = 4, \qquad a = 0, \quad b = 1, \qquad h_M = \frac{1}{4}, \qquad x_j = \frac{j}{4}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$f(x) = \exp(x^2)$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{1}{8}\; \{ f(x_0) + f(x_4) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \} = 1.49068$$

$g(x) = x^3 f(x)$

$$\tilde{w}_2 = \frac{1}{8}\ \{g(x_0) + g(x_4) + 2[g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)]\} = 0.569173$$

Erro da fórmula dos trapézios composta ($f \in C^2([a,b])$):

$$\left|E_1^{(M)}(f)\right| = \left|I(f) - I_1^{(M)}(f)\right| \leq \frac{b-a}{12}\, h_M^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$|w_1 - \tilde{w}_1| \leq \frac{1}{192} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

$$|w_2 - \tilde{w}_2| \leq \frac{1}{192} \max_{x\in[0,1]} |g''(x)|$$

$$\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = |f''(1)| = 6e$$

pois $f''(x) = 2(1+2x^2)f(x)$ é positiva crescente para $x \geq 0$.

$$\max_{x\in[0,1]} |g''(x)| = |g''(1)| = 24e$$

pois $g''(x) = 2x(3+7x^2+2x^4)f(x)$ é não negativa crescente para $x \geq 0$.

$$|w_1 - \tilde{w}_1| \leq \frac{e}{32} \leq 0.0850$$

$$|w_2 - \tilde{w}_2| \leq \frac{e}{8} \leq 0.340$$

**(c)**[25]

$$\frac{\|y-\tilde{y}\|_\infty}{\|y\|_\infty} \leq \frac{\mathrm{cond}_\infty(A)}{1 - \frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}\mathrm{cond}_\infty(A)} \left(\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|w-\tilde{w}\|_\infty}{\|w\|_\infty}\right)$$

$$\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}\mathrm{cond}_\infty(A) < 1$$

$$\|w-\tilde{w}\|_\infty = \max\{|w_1-\tilde{w}_1|, |w_2-\tilde{w}_2|\} \leq 0.340$$

$$w_1 \in [\tilde{w}_1 - |w_1-\tilde{w}_1|\,, \tilde{w}_1 + |w_1-\tilde{w}_1|] \subset ]1.40, 1.58[$$

$$w_2 \in [\tilde{w}_2 - |w_2-\tilde{w}_2|\,, \tilde{w}_2 + |w_2-\tilde{w}_2|] \subset ]0.229, 0.910[$$

$$\|w\|_\infty = \max\{|w_1|, |w_2|\} > 1.40$$

$$\frac{\|w-\tilde{w}\|_\infty}{\|w\|_\infty} < 0.243$$

$$A - \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \frac{1}{7} - 0.143 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A - \tilde{A}\|_\infty \leq 0.143 \times 10^{-3}$$

$$\|A\|_\infty = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 0.115 \times 10^{-3}$$

$$A^{-1} = \frac{4}{9} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 28 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{140}{9}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{175}{9} < 19.5$$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} \mathrm{cond}_\infty(A) \leq 0.224 \times 10^{-2} < 1$$

$$\frac{\|y - \tilde{y}\|_\infty}{\|y\|_\infty} < \frac{19.5}{1 - 0.224 \times 10^{-2}} (0.115 \times 10^{-3} + 0.243) < 4.74$$

**[4]**[20]

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = I(f - p_2) = I(vW_3)$$

$$v(x) = f[a, c, b, x], \qquad W_3 = (x - a)(x - c)(x - a), \qquad c = \frac{a + b}{2}$$

Introduzindo a função $u$ definida por:

$$u(x) = \int_a^x W_3(t)dt, \qquad u'(x) = W_3(x)$$

$$E_2(f) = \int_a^b v(x)W_3(x)\, dx = \int_a^b v(x)u'(x)\, dx$$

Integrando por partes:

$$E_2(f) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)\, dx$$

Sendo $u(a) = 0, \;\; u(b) = 0$ o primeiro termo é zero.

Sendo $u(x) \geq 0, \;\; \forall x \in [a, b],$ o teorema do valor médio para integrais permite escrever

$$E_2(f) = -v'(\eta)\int_a^b u(x)\,dx, \qquad \eta \in ]a,b[$$

Usando a definição de derivada da diferença dividida e a relação desta com a derivada da função resulta:

$$v'(\eta) = f[a,c,b,\eta,\eta] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}, \qquad \xi \in ]a,b[$$

Atendendo finalmente a que:

$$\int_a^b u(x)\,dx = -\int_a^b xW_3(x)\,dx = \frac{(b-a)^5}{120}$$

obtém-se o resultado pretendido:

$$E_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

**[5]**

$$\begin{cases} W'(x) = F(x, W(x)), \\ W(1) = W_0 \end{cases}$$

$$W = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \qquad F(x,W) = \begin{bmatrix} z \\ g(x,y,z) \end{bmatrix}, \qquad W_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(x,y,z) = -\frac{z}{x} - e^y$$

**(a)**[20]

Método de Taylor de ordem 2 (passo $h$):

$$W_{n+1} = W_n + hF(x_n, W_n) + \frac{h^2}{2}(d_F F)(x_n, W_n), \qquad n \geq 0$$

$$\begin{aligned}
(D_F F)(x,W) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + F(x,W)\cdot\nabla_W\right)F(x,W) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + g(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} z \\ g(x,y,z) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} g(x,y,z) \\ g_x(x,y,z) + zg_y(x,y,z) + g(x,y,z)g_z(x,y,z) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} g(x,y,z) \\ s(x,y,z) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$s(x,y,z)=\frac{2z}{x^2}+\left(\frac{1}{x}-z\right)e^y$$

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}+h\begin{bmatrix} z_n \\ g(x_n,y_n,z_n) \end{bmatrix}+\frac{h^2}{2}\begin{bmatrix} g(x_n,y_n,z_n) \\ s(x_n,y_n,z_n) \end{bmatrix}$$

$$y_1=y_0+hz_0+\frac{h^2}{2}g(x_0,y_0,z_0)=1+h-(1+e)\frac{h^2}{2}$$

$$z_1=z_0+hg(x_0,y_0,z_0)+\frac{h^2}{2}s(x_0,y_0,z_0)=1-(1+e)h+h^2$$

**(b)**[20]

Método de Heun (passo $h$):

$$W_{n+1}=W_n+\frac{h}{2}\left[F\left(x_n,W_n\right)+F\left(\tilde{x}_n,\tilde{W}_n\right)\right], \qquad n\geq 0$$

$$\tilde{x}_n=x_n+h, \qquad \tilde{W}_n=W_n+hF(x_n,W_n)$$

$$\tilde{W}_n=\begin{bmatrix} \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_n+hz_n \\ z_n+hg(x_n,y_n,z_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}+\frac{h}{2}\begin{bmatrix} z_n+\tilde{z}_n \\ g(x_n,y_n,z_n)+g(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n,\tilde{z}_n) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}_0=1+h, \qquad \tilde{z}_0=1-(1+e)h$$

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}\left(z_0+\tilde{z}_0\right)=1+h-\frac{1+e}{2}h^2$$

$$z_1=z_0+\frac{h}{2}\left[g(x_0,y_0,z_0)+g\left(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{z}_0\right)\right]=1-\frac{h}{2}\left(\frac{2+e}{1+h}+e^{1+h}\right)$$