

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [3a.1], [3a.2], [3a.3], [3a.4]

[3a] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva programas para calcular valores aproximados da solução z usando:

(I) o método de Newton;

(II) o método da secante.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3a.1] (1) $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2) $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função f à sua escolha.

[3a.2] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função f à sua escolha.

[3a.3] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função f à sua escolha.

[3a.4] (1) $f(x) = e^x - 1.5 - \arctan x$

(2) $f(x) = 0.1x^2 + e^{-x} - \sin(3x)$

(3) uma função f à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [3b.1], [3b.2], [3b.3]

[3b] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva programas para calcular valores aproximados da solução z usando:

(I) o método de Newton;

(II) o método de Stephensen,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{[f(x_m)]^2}{f(x_m + f(x_m)) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x_0 \text{ dado}$$

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3b.1] (1) $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2) $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função f à sua escolha.

[3b.2] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função f à sua escolha.

[3b.3] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função f à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [3c.1], [3c.2], [3c.3]

[3c] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação. Escreva programas para calcular valores aproximados da solução z usando:

(I) o método de Newton;

(II) o método de Newton modificado,

$$x_{m+1} = x_m - \frac{hf(x_m)}{f(x_m + h) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde $h > 0$ e suficientemente pequeno é mantido fixo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo das raízes das seguintes funções:

[3c.1] (1) $f(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - \sin(1 - x)$

(2) $f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 295$

(3) uma função f à sua escolha.

[3c.2] (1) $f(x) = 3x + \sin x - e^x$

(2) $f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$

(3) uma função f à sua escolha.

[3c.3] (1) $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

(2) $f(x) = e^{x^2-1} + 10 \sin(2x) - 5$

(3) uma função f à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [4a.1], [4a.2], [4a.3], [4a.4], [4a.5]

[4a] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Gauss-Seidel modificado** ou **método SOR**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas lineares:

$$[4a.1] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -9 \\ 0 & -9 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ \vdots \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4a.2] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 5 \\ -10 & -3 & -10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \\ -23 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

continua

$$[4a.3] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 19 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4a.4] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 2^d & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^d & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^d & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2^d \\ 2^{d-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[4a.5] \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 9 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i, & j = i, \quad i = 1, 2, \dots, d \\ 0.5i, & \begin{cases} j = i + 2, & i = 1, 2, \dots, d - 2 \\ j = i - 2, & i = 3, 4, \dots, d \end{cases} \\ 0.25i, & \begin{cases} j = i + 4, & i = 1, 2, \dots, d - 4 \\ j = i - 4, & i = 5, 6, \dots, d \end{cases} \\ 0, & \text{outros valores de } i \text{ e } j \end{cases}$$

$$b = [1 \ 1 \ \cdots \ 1 \ 1]^T$$

(3) um sistema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [5a.1], [5a.2], [5a.3], [5a.4], [5a.5]

[5a] Considere um sistema de equações $f(x) = 0$ onde $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z do sistema e tal que a sua matriz Jacobiana é invertível em z . Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton generalizado**. Use o **método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot** para resolver o sistema linear que determina a diferença de duas iteradas sucessivas do método de Newton.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo da solução dos seguintes sistemas não-lineares:

$$[5a.1] \quad (1) \quad \begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_1x_2^3 - 9 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[5a.2] \quad (1) \quad \begin{cases} x_1^3 - 6x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - 4x_2^3 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0 \\ x_2^2 - 2x_1x_3 - 4 = 0 \\ e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

$$[5a.3] \quad (1) \quad \begin{cases} 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 6x_1^2x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \log(x_1^2 + x_2^2) - \sin(x_1x_2) - \log(2\pi) + 1 = 0 \\ 4x_1^2 - 4x_1 + 8x_2^2 - 15 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

continua

[5a.4] (1)
$$\begin{cases} x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_1x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_3x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

[5a.5] (1)
$$\begin{cases} x_1^4 - 12x_1^2x_2^2 + 4x_2^4 - 1 = 0 \\ 4x_1^3x_2 - 8x_1x_2^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x_1x_2 - x_3^2 + 3 = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

(3) um sistema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: convergência e ordem de convergência; erro e estimativa do erro dos valores aproximados obtidos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [6a.1], [6a.2], [6a.3]

[6a] Sejam $x_0, x_1, \dots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \dots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Lagrange**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6a.1] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 5 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -5 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6a.2] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 3 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -3 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6a.3] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 2 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -2 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [6b.1], [6b.2], [6b.3]

[6b] Sejam $x_0, x_1, \dots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \dots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Newton**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[6b.1] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 5 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -5 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6b.2] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 3 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -3 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[6b.3] (1) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = 2 \left(-1 + \frac{2k}{N} \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$

(2) $\{(x_k, f(x_k))\}_{k=0}^N$, $x_k = -2 \cos \left(\frac{2k+1}{2N+2} \pi \right)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de interpolação; variação dos resultados com o número de nós de interpolação.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [7a.1], [7a.2], [7a.3]

[7a] Sejam $x_0, x_1, \dots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \dots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o polinómio de grau menor ou igual a n , sendo $n \leq N$, que constitui a **melhor aproximação mínimos quadrados discreta** de f nos pontos dados. Utilize o **método de eliminação de Gauss** para resolver o sistema normal.

Teste o programa que escreveu aplicando-o ao cálculo dos polinómios interpoladores dos seguintes conjuntos de pontos:

[7a.1] (1) { (4.0, 102.56), (4.2, 113.18), (4.5, 130.11), (4.7, 142.05),
(5.1, 167.53), (5.5, 195.14), (5.9, 224.87), (6.3, 256.73),
(6.8, 299.50), (7.1, 326.72) }

(2) { (0.00, 0.872740), (0.05, 1.16988), (0.10, 0.913756), (0.15, 0.876550),
(0.20, 0.938130), (0.25, 1.06479), (0.30, 1.18807), (0.35, 1.07725),
(0.40, 1.20431), (0.45, 1.33526), (0.50, 1.19192), (0.55, 1.32128),
(0.60, 1.36179), (0.65, 1.48189), (0.70, 1.66238), (0.75, 1.44720),
(0.80, 1.46947), (0.85, 1.65419), (0.90, 1.69708), (0.95, 1.88074),
(1.00, 2.16617) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

[7a.2] (1) { (0.00, 0.486), (0.05, 0.866), (0.10, 0.944), (0.15, 1.144),
(0.20, 1.103), (0.25, 1.202), (0.30, 1.166), (0.35, 1.191),
(0.40, 1.124), (0.45, 1.095), (0.50, 1.122), (0.55, 1.102),
(0.60, 1.099), (0.65, 1.017), (0.70, 1.111), (0.75, 1.117),
(0.80, 1.152), (0.85, 1.265), (0.90, 1.380), (0.95, 1.575),
(1.00, 1.857) }

(2) { (0.0, 2.03364), (0.1, 2.07461), (0.2, 1.76509), (0.3, 1.70568),
(0.4, 1.69930), (0.5, 1.55382), (0.6, 1.46953), (0.7, 1.25615),
(0.8, 1.33597), (0.9, 0.94252), (1.0, 0.873378), (1.1, 1.06954),
(1.2, 1.13408), (1.3, 1.27233), (1.4, 1.32770), (1.5, 1.58530),
(1.6, 1.70647), (1.7, 1.56329), (1.8, 1.81244), (1.9, 1.85916),
(2.0, 2.08769) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

continua

[7a.3] (1) { (0.00, 0.4910), (0.05, 0.5362), (0.10, 0.5856), (0.15, 0.6774),
 (0.20, 0.6136), (0.25, 0.6829), (0.30, 0.7135), (0.35, 0.7520),
 (0.40, 0.7838), (0.45, 0.7685), (0.50, 0.7141), (0.55, 0.7603),
 (0.60, 0.7572), (0.65, 0.7358), (0.70, 0.6678), (0.75, 0.6812),
 (0.80, 0.6796), (0.85, 0.6669), (0.90, 0.6353), (0.95, 0.5862),
 (1.00, 0.4613) }

(2) { (0.00, 1.02510), (0.05, 0.891960), (0.10, 0.959876), (0.15, 0.929897),
 (0.20, 1.11034), (0.25, 0.930305), (0.30, 0.916617), (0.35, 1.04574),
 (0.40, 1.14783), (0.45, 1.13681), (0.50, 1.26505), (0.55, 1.25428),
 (0.60, 1.11711), (0.65, 1.14717), (0.70, 1.39232), (0.75, 1.29891),
 (0.80, 1.57156), (0.85, 1.74427), (0.90, 1.60858), (0.95, 1.98931),
 (1.00, 1.85503) }

(3) um conjunto de pontos à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro quadrático; variação dos resultados com o grau do polinómio aproximador.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [8a.1], [8a.2]

[8a] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 2 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número par;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8a.1] (1) $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2) $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8a.2] (1) $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2) $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [8b.1], [8b.2]

[8b] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 3 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 3;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8b.1] (1) $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2) $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8b.2] (1) $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2) $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [8c.1], [8c.2]

[8c] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 4 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 4;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8c.1] (1) $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2) $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8c.2] (1) $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2) $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [8d.1], [8d.2]

[8d] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 5 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 5;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8d.1] (1) $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2) $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8d.2] (1) $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2) $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

TCCC – Exercícios [8e.1], [8e.2]

[8e] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva programas para calcular valores aproximados do integral usando:

- (I) **a Fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 6 composta** com M sub-intervalos, onde M é um número múltiplo de 6;
- (II) **a Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M' sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

Teste os programas que escreveu aplicando-os ao cálculo dos seguintes integrais:

[8e.1] (1) $\int_6^{10} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

(2) $\int_6^{10} f_1(x) \cos(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

[8e.2] (1) $\int_5^9 f_2(x) dx, \quad f_2(x) = \frac{x^6}{(x^2 + 4x + 13)^3}$

(2) $\int_5^9 f_2(x) \sin(2x) dx$

(3) um integral à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro e estimativa do erro de integração; variação dos resultados com o número de sub-intervalos.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^a

TCCC – Exercícios [10a.1], [10a.2]

[10a] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 3^a ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10a.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x), \\ y'_2(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

[10a.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y'_2(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^a

TCCC – Exercícios [10b.1], [10b.2]

[10b] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Nystrom de 3^a ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10b.1] (1)
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10b.2] (1)
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^a

TCCC – Exercícios [10c.1], [10c.2]

[10c] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 4^a ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10c.1] (1)
$$\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

[10c.2] (1)
$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y_2'(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$$

(3) um problema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^a

TCCC – Exercícios [10d.1], [10d.2]

[10d] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Gill de 4^a ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10d.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x), \\ y'_2(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

[10d.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y'_2(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^a

TCCC – Exercícios [10e.1], [10e.2]

[10e] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Merson de 4^a ordem**.

Teste o programa que escreveu aplicando-o aos seguintes problemas de valor inicial:

[10e.1] (1) $\begin{cases} y'(x) = -x^2[y(x)]^2 + y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x), \\ y'_2(x) = -\sin y_1(x), & x \geq 0, \\ y_1(0) \in [0, \pi], & y_2(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

[10e.2] (1) $\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^3 - y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'_1(x) = y_1(x)(1 - y_2(x)), \\ y'_2(x) = y_2(x)(-1 + y_1(x)), & x \geq 0, \\ y_1(0) > 0, & y_2(0) > 0. \end{cases}$

(3) um problema à sua escolha.

Aspectos a considerar, em particular: erro da solução aproximada obtida; variação da solução aproximada com o passo de integração.