

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1^o

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 28 de Janeiro de 2010

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]²⁰ Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor de um polinómio do 2^o grau p num ponto $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = (a_2 \times x + a_1) \times x + a_0.$$

Supondo que x, a_0, a_1, a_2 são números reais com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado no cálculo, e que a unidade de arredondamento deste sistema é U , mostre que o valor calculado de $p(x)$, $\tilde{p}(x)$, se pode escrever na forma

$$\tilde{p}(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0,$$

onde A_0, A_1, A_2 são valores aproximados de a_0, a_1, a_2 , respectivamente, cujos erros relativos satisfazem a $|\delta_{A_i}| \leq K_i U$, onde $K_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, para $i = 0, 1, 2$.

[2] Considere o polinómio

$$p(x) = x^6 - 6x + 2.$$

(a)²⁰ Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0 \neq x_1$ no intervalo $I = [0.2, 0.4]$ converge para uma das duas raízes reais do polinómio.

(b)²⁰ Utilize o método da secante com condições iniciais $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.4$ para obter um valor aproximado desta raiz com um erro absoluto inferior a 0.001.

[3]²⁰ Considere o sistema de equações não-lineares $f(x) = 0$, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_2 - \cos x_2 - \sin x_1 \end{bmatrix},$$

o qual tem uma solução única z no 1^o quadrante de $\mathbb{R}^2$. Calcule um valor aproximado $x^{(1)}$ para a solução z do sistema usando uma iterada do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [0.25 \ 0.50]^T$.

Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear que ocorre na aplicação do método de Newton generalizado.

[4]²⁰ Demonstre a fórmula do erro de interpolação de uma função $f \in C^{n+1}([a, b])$ por um polinómio p_n de grau menor ou igual a n nos pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ do intervalo $[a, b]$:

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

onde $x \in [a, b]$ e $\xi \in]x_0; x_1; \dots x_n; x[$.

v.s.f.f.

[5] Tendo em atenção a definição e as propriedades do sistema de polinómios ortogonais de Chebyshev:

(a)²⁰ Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a dois a melhor aproximação mínimos quadrados da função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

relativamente ao produto interno

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \forall g, h \in C([-1, 1]).$$

(b)²⁰ Determine a fórmula de Gauss-Chebyshev com três nós de integração que aproxima o integral

$$I(f) = \int_{-1}^3 \frac{f(x)}{\sqrt{(x+1)(3-x)}} dx, \quad \forall f \in C([-1, 3]).$$

[6]²⁰ Suponha que pretende obter um valor aproximado do integral

$$I = \int_1^2 e^{-x^2} dx,$$

usando a regra do ponto médio composta. Determine o número mínimo de subintervalos (M) que deve utilizar para garantir um erro de integração absoluto inferior a 10^{-6} .

[7] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = [y(x)]^3 + 2xy(x) + 3, & x \geq 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(a)¹⁰ Obtenha um valor aproximado y_1 para $y(1+h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de ordem 2.

(b)¹⁵ Obtenha um valor aproximado $\hat{y}_2$ para $y(1+2h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Adams-Bashforth de ordem 2 ($p=1, q=2$) com valores iniciais $\hat{y}_0 = 1, \hat{y}_1 = 1 + 6h + 16h^2$.

[8]¹⁵ Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) - y(x) = 0, & x \geq 1, \\ y(1) = 1, & y'(1) = 2. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados y_1, z_1 para $y(1+h), y'(1+h)$, respectivamente, usando um passo de comprimento $h > 0$ do método de Runge-Kutta de 2ª ordem conhecido por método de Heun.