INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2009/2010 Semestre: 1º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 16.JAN.2010

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Considere os números reais a e

$$z = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$, f e f' são funções elementares, e $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{a}$ de a, e que as operações envolvidas no cálculo de z, subtracção, divisão, cálculo do valor de f num ponto e cálculo do valor de f' num ponto, têm erros relativos de arredondamento $\delta_s, \delta_d, \delta_f$ e $\delta_{f'}$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z em relação a z.

[2] Considere o polinómio

$$p(x) = x^4 - 8x - 4,$$

com duas raízes reais z_1 e z_2 tais que

$$z_1 \in [-0.6, -0.4], \qquad z_2 \in [2.0, 2.2].$$

(a)^{15} Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{8}\,(x^4 - 4),$$

e qualquer iterada inicial $x_0 \in [-0.6, -0.4]$, converge para a raiz z_1.

(b)^{20} Utilize o método do ponto fixo com a função iteradora g da alínea anterior e iterada inicial $x_0 = -0.5$ para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-4}.

[3] Considere o sistema de equações $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}).$$

(a)^{10} Determine um intervalo de valores de α para os quais o método iterativo de Jacobi converge para a solução z do sistema $Ax = b$ para qualquer iterada inicial.

(b)^{25} Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e a iterada inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$, determine a segunda iterada do método de Jacobi $x^{(2)}$ e obtenha um majorante do erro absoluto $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

v.s.f.f.

[4] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-2	0	2
$f(x_i)$	-1	5	27

(a)[15] Determine o polinómio interpolador de f, p_2, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(b)[15] Supondo que $|f'''(x)| \leq 1, \forall x \in [-2, 2]$, determine um majorante do erro de interpolação $|f(x) - p_2(x)|$, válido para qualquer $x \in [-2, 2]$.

(c)[15] Determine os valores das constantes a, b e c que minimizam a soma

$$S(a, b, c) = \sum_{i=0}^{2} \left[f(x_i) - a x_i^2 - b x_i - c \right]^2 .$$

[5] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) + \cos(x^2) y(x) = 0, & x \geq 1, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

cuja solução exacta é dada por $Y(x) = \exp\left(-\int_1^x \cos(t^2) dt\right)$.

(a)[25] Calcule um valor aproximado y_a para $Y(1.2)$ usando a regra dos trapézios composta com dois sub-intervalos para obter um valor do integral $\int_1^{1.2} \cos(t^2) dt$. Obtenha um majorante para o erro absoluto $|Y(1.2) - y_a|$.

(b)[25] Calcule um valor aproximado y_b para $Y(1.2)$ usando o método de Euler com passo de integração $h = 0.1$ para resolver o problema de valor inicial. Obtenha um majorante para o erro absoluto $|Y(1.2) - y_b|$.

(c)[15] Calcule um valor aproximado y_c para $Y(1.2)$ usando o método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem com passo de integração $h = 0.2$ para resolver o problema de valor inicial.