INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Ano Lectivo: 2007/2008

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

3 de Junho de 2008

Duração: 2 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^4(\mathbb{R})$:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$f(x_i)$	-3.500	-2.551	-1.095	0.4480	1.579	2.178

(a)^{15} Determine o polinómio p_3 que interpola f nos pontos x_0, x_1, x_4, x_5. Use a fórmula de Newton com diferenças divididas.

(b)^{15} Supondo que a quarta derivada de f é definida por

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x,$$

determine o menor majorante do erro de interpolação $|f(x) - p_3(x)|$ válido para todos os valores de $x \in [0.0, 5.0]$.

(c)^{15} Determine o polinómio do primeiro grau q_1 que minimiza a soma

$$\sum_{i=1}^{4} [f(x_i) - q_1(x_i)]^2.$$

(d)^{15} Calcule o valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_1^5 f(x)\, dx,$$

usando a regra de Simpson composta com 4 subintervalos.

(e)^{10} Supondo outra vez que $f^{(4)}$ é definida por

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x,$$

determine o número mínimo de subintervalos que seria necessário utilizar para que o erro de integração da regra de Simpson composta para aproximar o integral $I(f)$ da alínea anterior fosse inferior a 10^{-6}.

v.s.f.f.

[2] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x[y(x)]^2 - y(x), & 1 \leq x \leq 1.13, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

com solução exacta $Y : [1, 1.13] \to \mathbb{R}$.

(a)^{10} Obtenha um valor aproximado y_1 para $Y(1+h)$, onde $0 < h \ll 0.13$ é o passo, usando o método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

(b)^{10} Obtenha um valor aproximado $\hat{y}_1$ para $Y(1+h)$, onde $0 < h \ll 0.13$ é o passo, usando o método de Runge-Kutta de $2^{\underline{a}}$ ordem conhecido por método de Heun.

Nota. Os resultados deverão vir expressos em termos de h.

[3]^{10} Demonstre a fórmula do erro de integração do método do ponto médio:

$$E_0(f) = I(f) - I_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi),$$

onde $f \in C^2([a,b])$ e $\xi \in]a,b[$.