INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Ano Lectivo: 2007/2008 Ano Lectivo: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Resolução do Teste de 21 de Abril de 2008

[1][15]

$$z_1 = e^x, \qquad z_2 = e^{-x}, \qquad z_3 = z_1 - z_2, \qquad z = \sinh x = \frac{z_3}{2}$$

$$\delta_{\tilde{z}_1} = x\,\delta_{\tilde{x}} + \delta_1$$

$$\delta_{\tilde{z}_2} = -x\,\delta_{\tilde{x}} + \delta_2$$

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{z}_3} &= \frac{z_1}{z_3}\,\delta_{\tilde{z}_1} - \frac{z_2}{z_3}\,\delta_{\tilde{z}_2} + \delta_3 \\ &= \frac{x(z_1+z_2)}{z_3}\,\delta_{\tilde{x}} + \frac{z_1}{z_3}\,\delta_1 - \frac{z_2}{z_3}\,\delta_2 + \delta_3 \\ \delta_{\tilde{z}} &= \delta_{\tilde{z}_3} + \delta_4 \\ &= \frac{x\cosh x}{\sinh x}\,\delta_{\tilde{x}} + \frac{e^x}{2\sinh x}\,\delta_1 - \frac{e^{-x}}{2\sinh x}\,\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ &=: p(x)\,\delta_{\tilde{x}} + q_1(x)\,\delta_1 + q_2(x)\,\delta_2 + \delta_3 + \delta_4\end{aligned}$$

Definindo $p(0) = \lim_{x\to 0} p(x) = 1$ o problema é estável ou bem posto para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Uma vez que p cresce com $|x|$, tendendo para infinito com $|x|$, o problema é mal condicionado para valores suficientemente elevados de $|x|$.

O algoritmo para o cálculo de $\sinh x$ é numericamente instável para $x \approx 0$ pois q_1 e q_2 são singulares para $x = 0$.

[2]

(a)[15]

$$\frac{\|x_\varepsilon - x_0\|_1}{\|x_0\|_1} \le \frac{\mathrm{cond}_1(A_0)}{1 - \frac{\|A_\varepsilon - A_0\|_1}{\|A_0\|_1}\,\mathrm{cond}_1(A_0)} \left(\frac{\|A_\varepsilon - A_0\|_1}{\|A_0\|_1} + \frac{\|b_\varepsilon - b_0\|_1}{\|b_0\|_1} \right)$$

$$\mathrm{cond}_1(A_0) = \|A_0\|_1 \|A_0^{-1}\|_1, \qquad \|A_\varepsilon - A_0\|_1 \|{A_0}^{-1}\|_1 < 1$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_0^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A_0\|_1 = \max\{4+1, 1+2\} = 5$$

$$\|A_0^{-1}\|_1 = \frac{1}{7}\max\{2+1, 1+4\} = \frac{5}{7}$$

$$\text{cond}_1(A_0) = \frac{25}{7}$$

$$\|b_0\|_1 = 5, \qquad \|x_0\|_1 = 3$$

$$A_\varepsilon - A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon - b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\|A_\varepsilon - A_0\|_1 = |\varepsilon|, \qquad \|b_\varepsilon - b_0\|_1 = |\varepsilon|$$

$$\|x_\varepsilon - x_0\|_\infty \le \frac{\frac{30}{7}|\varepsilon|}{1 - \frac{5}{7}|\varepsilon|} \qquad \left(|\varepsilon| < \frac{7}{5}\right)$$

(b)[15]

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = L + D + U = M_{GS} + N_{GS}$$

$$M_{GS} = L + D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad N_{GS} = U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = D^{-1}\left(-Lx^{(m+1)} - Ux^{(m)} + b\right), \qquad m \ge 0$$

$$x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x^{(m+1)} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\left(2 + x_2^{(m)}\right) \\ \frac{1}{2}\left(4 + x_1^{(m+1)}\right) \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{21}{25} \\ \frac{121}{50} \end{bmatrix}$$

$$\|x_1 - x^{(2)}\|_\infty \le \frac{c}{1-c}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty, \qquad c = \|C_{GS}\|_\infty$$

$$C_{GS} = -M_{GS}^{-1}N_{GS} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|C_{GS}\|_\infty = \frac{1}{5}$$

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{25} \\ \frac{11}{50} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \frac{11}{25}$$

$$\|x_1 - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{11}{100}$$

[3]

(a)[15]

$p(x) = x^5 - 10x + 5$

$p'(x) = 5x^4 - 10 = 5(x^4 - 2)$

p' tem duas raízes reais, $2^{1/4}$ e $-2^{1/4}$.

p tem quanto muito três raízes reais.

$$\left.\begin{array}{l} p(-2.0) = -7.0 \\ p(-1.8) = +4.10432 \end{array}\right\} \Rightarrow p \text{ tem pelo menos uma raíz em } I_1 := [-2.0, -1.8]$$

$$\left.\begin{array}{l} p(0.4) = +1.01024 \\ p(0.6) = -0.92224 \end{array}\right\} \Rightarrow p \text{ tem pelo menos uma raíz em } I_2 := [0.4, 0.6]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1.6) = -0.51424 \\ f(1.8) = +5.89568 \end{array}\right\} \Rightarrow p \text{ tem pelo menos uma raíz em } I_3 := [1.6, 1.8]$$

p tem exactamente três raízes em $\mathbb{R}$, uma em cada um dos intervalos I_1, I_2, I_3.

(b)[15]

$p(z_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = g(z_2)$

$g(x) = \dfrac{1}{10}\,(x^5 + 5)$

$g'(x) = \dfrac{x^4}{2} > 0, \ \ \forall \in I_2, \qquad g''(x) = 2x^3 > 0, \ \ \forall x \in I_2$

Condições suficientes de convergência do método do ponto fixo
com função iteradora g para z_2, $\forall x_0 \in I_2$:

(i) $g \in C^2(I_2)$

(ii) $\max\limits_{x \in I_2} |g'(x)| = |g'(0.6)| = 0.0648 < 1$,

pois g' é positiva e crescente em I_2.

(iii) $g(I_2) \subset I_2$,

pois $g(0.4) = 0.501024 \in I_2$, $\ g(0.6) = 0.507776 \in I_2$, e g é crescente em I_2.

Método do ponto fixo:

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \in I_2$$

$$|z_2 - x_m| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_m - x_{m-1}| =: B_m$$

$$L = \max_{x \in I_2} |g'(x)| = 0.0648$$

m	x_m	B_m
0	0.5	
1	0.503125	0.217×10^{-3}
2	0.503224	0.685×10^{-5}

$$z_2 = 0.503224 + \Delta, \qquad |\Delta| < B_2$$

(c)[15]

Condições suficientes de convergência do método de Newton para z_3, $\forall x_0 \in I_3$:

(0) $p \in C^2(I_3)$

(i) $p(1.6)\,p(1.8) < 0$

(ii) $p'(x) = 5x^4 - 10 > 0, \ \ \forall x \in I_3$

(iii) $p''(x) = 20x^3 > 0, \ \ \forall x \in I_3$

(iv) $\left|\dfrac{p(1.6)}{p'(1.6)}\right| = 0.0225861 < 0.2, \qquad \left|\dfrac{p(1.8)}{p'(1.8)}\right| = 0.138761 < 0.2$

Método de Newton:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{p(x_m)}{p'(x_m)}, \quad m \geq 0, \qquad x_0 \in I_3$$

$$|z_3 - x_m| \leq K|z - x_{m-1}|^2 =: B_m, \qquad K = \frac{\max_{x \in I_3} |p''(x)|}{2 \min_{x \in I_3} |p'(x)|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \min_{x \in I_3} |p'(x)| = |p'(1.6)| \\ \max_{x \in I} |p''(x)| = |p''(1.8)| \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad K = 2.56149$$

$$x_0 = 1.7, \qquad |z_3 - x_0| \leq 0.1$$

$$K|z_3 - x_0| \leq 0.256149 < 1$$

m	x_m	B_m
0	1.7	
1	1.63078	0.256×10^{-1}
2	1.62186	0.168×10^{-2}
3	1.62173	0.724×10^{-5}

$z = 1.62173 + \Delta, \qquad |\Delta| \leq B_3.$

[4][10]

Fórmula de Taylor de g em torno do ponto z:

$$g(x_m) = g(z) + \sum_{i=1}^{p-1} g^{(i)}(z) \, \frac{(x_m - z)^i}{i!} + g^{(p)}(\xi_m) \, \frac{(x_m - z)^p}{p!}, \qquad \xi_m \in]z; x_m[$$

Atendendo às hipóteses:

$$g(x_m) = g(z) + g^{(p)}(\xi_m) \, \frac{(x_m - z)^p}{p!}$$

$$z - x_{m+1} = (-1)^{p+1} g^{(p)}(\xi_m) \, \frac{(z - x_m)^p}{p!}$$

Estimativa de erro:

$$|z - x_{m+1}| \leq K_p |z - x_m|^p, \qquad K_p = \frac{1}{p!} \max_{x \in I} \left| g^{(p)}(x) \right|$$

Estimativa de erro à priori:

$$w_{m+1} \leq w_m^p, \qquad w_m := K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_m|$$

$$w_m \leq w_0^{p^m}$$

$$|z - x_m| \leq K_p^{\frac{1}{1-p}} \left(K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_0| \right)^{p^m}$$