INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano Lectivo: 2007/2008 **Semestre: 2º**

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Teste de 21 de Abril de 2008

Duração: 2 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{15} Considere o seguinte algoritmo para o cálculo da função seno hiperbólico num ponto $x \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = e^x, \qquad z_2 = e^{-x}, \qquad z_3 = z_1 - z_2, \qquad z = \sinh x = \frac{z_3}{2}.$$

Supondo que é apenas conhecido um valor aproximado $\tilde{x}$ de x e que as quatro operações envolvidas no cálculo de z, exponenciação (duas vezes), subtracção e divisão por 2, têm erros de arredondamento $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z. Utilize o resultado para analisar a estabilidade do problema e a estabilidade numérica do algoritmo.

[2] Considere o sistema linear $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4+\varepsilon & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 3+\varepsilon \end{bmatrix},$$

e ε é um parâmetro real, $|\varepsilon| \leq 1$.

(a)^{15} Sabendo que o sistema $A_0 x_0 = b_0$ (isto é, o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$ com $\varepsilon = 0$) tem a solução $x_0 = [1 \;\; 2]^T$, determine, sem resolver o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, um majorante do erro absoluto $\|x_\varepsilon - x_0\|_1$.

(b)^{15} Determine um valor aproximado $x^{(2)}$ da solução x_1 do sistema $A_1 x_1 = b_1$ usando duas iteradas do método de Gauss-Seidel com aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0]^T$ e obtenha um majorante do erro absoluto $\|x_1 - x^{(2)}\|_\infty$.

v.s.f.f.

[3] Considere o polinómio

$$p(x) = x^5 - 10x + 5.$$

(a)[15] Mostre que o polinómio tem três e só três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-2.0, -1.8], \qquad z_2 \in [0.4, 0.6], \qquad z_3 \in [1.6, 1.8].$$

(b)[15] Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{10}(x^5 + 5),$$

e qualquer iterada inicial $x_0 \in [0.4, 0.6]$, converge para a raiz z_2 e utilize este método para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-4}.

(c)[15] Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.6, 1.8]$ converge para a raiz z_3 e utilize este método para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-4}.

[4][10] Considere uma função $g \in C^p(I),\ \ p \geq 2$, onde I é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, tal que

$$g'(z) = \cdots = g^{(p-1)}(z) = 0, \qquad g^{(p)}(z) \neq 0.$$

Supondo que o método do ponto fixo com função iteradora g e iterada inicial $x_0 \in I$ converge para z, demonstre a seguinte estimativa do erro da iterada de ordem m do método:

$$|z - x_m| \leq K_p^{\frac{1}{1-p}} \left(K_p^{\frac{1}{p-1}} |z - x_0| \right)^{p^m},$$

onde

$$K_p = \frac{1}{p!} \max_{x \in I} \left| g^{(p)}(x) \right|.$$