INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios[1]

[8.1]* Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(a) Determine o valor aproximado do integral usando a regra dos trapézios composta com

$$M = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8,$$

subintervalos de integração. Apresente uma tabela com as seguintes colunas:

(i) M.

(ii) $I_1^{(M)}(f)$.

(iii) A estimativa de erro obtida a partir da fórmula de erro

$$E_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12} h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

(iv) A estimativa de erro dada pela fórmula

$$\frac{1}{3} \left| I_1^{(M)}(f) - I_1^{(M/2)}(f) \right|.$$

(v) O valor do erro $\left| E_1^{(M)}(f) \right|$ calculado sabendo que o valor exacto do integral é $I = 0.746824132812\ldots$

(vi) O valor do quociente $\left| E_1^{(M)}(f) \right| / \left| E_1^{(M/2)}(f) \right|$.

(b) Repita o exercício (com excepção de (iii)) para o integral

$$\tilde{I} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

[8.2] Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-4}, utilizando:

[1] O asterisco * a seguir ao número do exercício indica "exercício recomendado".

(i) A regra dos trapézios.
(ii) A regra de Simpson.

[**8.3**] Suponha que a função f é definida no intervalo $[0, b]$, do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 1, & 1 \leq x \leq b. \end{cases}$$

(a) Obtenha aproximações para o integral

$$I(f) = \int_0^b f(x)dx,$$

com $b = 2$ e $b = 3$, dos seguintes modos:
(i) Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.
(ii) Utilizando a regra de Simpson (simples).

(b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

(c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra de Simpson? Justifique.

[**8.4**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f definida em $\mathbb{R}$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$1/2$	$-1/2$

(a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio de grau ≤ 2, $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

(b) Suponha que pretendemos aproximar

$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx, \qquad \text{por} \qquad I_2(f) = \int_{-2}^{2} p_2(x)dx.$$

Sabendo que as derivadas de f verificam $|f^{(j)}(x)| \leq j/2,\ j = 1, 2, 3, 4$, no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

[**8.5**] A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

N	8	16	32	64
$I_n^{(N)}$	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor $I_n^{(N)}$ representa a aproximação obtida, com $N + 1$ nós de integração. Sabendo que o valor exacto do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido utilizada (trapézios ou Simpson).

[**8.6**] Calcule o valor aproximado de

$$I = \int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

usando:

(a) A regra dos trapézios composta com 5 nós de integração igualmente espaçados, e determine um majorante do erro.

(b) A regra de Simpson simples, e determine um majorante do erro.

[**8.7**] Sabe-se que a função $f \in C^4(-2, 10)$ toma os valores $f(1) = -2, f(4) = 7, f(10) = 6$, e que $1, 4$ e 10 são pontos fixos de $f \circ f$.

(a) Determine o valor aproximado de

$$I(f) = \int_{-2}^{10} f(x) dx,$$

usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

(b) Admitindo que $|f^{(4)}(x)| \leq 10$, determine um majorante do erro absoluto cometido em (a).

[**8.8**]* Calcule o valor aproximado dos integrais

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad \tilde{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

usando as seguintes fórmulas de quadratura:

$$I_1^{(6)}(f), \qquad I_2^{(6)}(f), \qquad I_3^{(6)}(f), \qquad I_6^{(6)}(f) \equiv I_6(f).$$

Determine em cada caso os erros dos valores aproximados a partir dos resultados exactos:

$$I = 0.746824132812\ldots \qquad \tilde{I} = 0.785398163397\ldots.$$

[**8.9**] Aplique a regra dos trapézios composta para aproximar os integrais

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \, dx \,, \qquad I_2 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx \,.$$

Estime a ordem de convergência em ambos os casos. Note que $I_1 \approx 7.95492652101284$ e $I_2 = 2$.

[**8.10**] **(a)** Obtenha a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 8, a correspondente fórmula composta e os respectivos erros.

(b) Supondo que $f \in \mathcal{P}_{n+\nu_n}$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$, mostre que o erro de integração da fórmula de Newton-Cotes de ordem n composta com $2M$ subintervalos, onde M é múltiplo de n, é dado por

$$E_n^{(2M)}(f) = \frac{I_n^{(2M)}(f) - I_n^{(M)}(f)}{2^{n+\nu_n} - 1}.$$

[8.11] Considere a regra de Simpson composta num intervalo $[a, b]$ e o valor aproximado para N subintervalos, dado por $S_N(f)$. Mostre que quando $f^{(4)}$ é constante se verifica a condição para o erro

$$15E_{2N}(f) = S_{2N}(f) - S_N(f).$$

[8.12] Seja $f \in C[a, b]$ uma função tal que f' é integrável em $[a, b]$.

(a) Prove a seguinte estimativa do erro para a regra dos trapézios composta:

$$E_1^{(N)}(f) = \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} - x \right) f'(x)\, dx,$$

onde $x_j = a + jh$, $j = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{N}$.

(b) Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx,$$

pela regra dos trapézios composta com $h = \frac{1}{6}$. Estime o erro.

[8.13] Demonstre que na regra de integração do ponto médio se tem:

$$\int_{x_0 - \frac{h}{2}}^{x_0 + \frac{h}{2}} f(x)dx = hf(x_0) + E_0(f),$$

onde

$$E_0(f) = \frac{h^3 f''(\theta)}{24} \qquad \text{com} \qquad \theta \in \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right].$$

[8.14]* Considere o integral

$$I(f) = \int_0^1 e^x f(x)\, dx, \qquad f \in C([0, 1]).$$

(a) Determine A_0 e A_1 de modo a que a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1),$$

para aproximar $I(f)$, seja exacta para funções da forma $f(x) = a+bx$, com a e b constantes reais.

(b) Determine a expressão do erro de integração da fórmula de quadratura $I_1(f)$ obtida na alínea (a).

(c) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule $I_1(f)$ e obtenha um majorante do erro absoluto deste valor aproximado.

(d) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule um valor aproximado para $I(f)$ usando a regra dos trapézios composta com 4 subintervalos e obtenha um majorante do erro absoluto deste valor aproximado.

(e) Tomando $f(x) = \sin x$ calcule o número mínimo de subintervalos a usar na regra dos trapézios composta para garantir que o erro absoluto do valor aproximado do integral seja inferior a 10^{-4}.

[**8.15**] Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, isto é, uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

(a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

(b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

(c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

[**8.16**] **(a)** Determine uma fórmula de quadratura

$$I_1(f) = 2f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

para aproximar integrais da forma

$$I(f) = \int_{0}^{1} f(x)\, dx,$$

que seja exacta para os polinómios de grau 2.

(b) Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida na alínea (a).

[**8.17**] Pretende-se calcular

$$Z(\alpha, m) = \int_{-1}^{1} (x^{\alpha} + 2) \cos(m \arccos(x)) dx.$$

(a) Considere a aproximação de $Z(1,2)$ e de $Z(2,2)$ usando a integração de Gauss-Legendre com dois nós de quadratura. Alguns destes valores é exacto, qual?

(b) Calcule o valor aproximado de $Z(2,m)$ usando a regra de Simpson simples. Determine o valor exacto de $Z(2,2)$ através da fórmula do erro.

[**8.18**] **(a)** Determine uma fórmula de quadratura do tipo

$$I_1(f) = A_0 f(-c) + A_1 f(c),$$

que seja exacta para integrais $I(x^k)$, com $k = 0, 1, 2$, onde

$$I(f) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx.$$

(b) Utilize a fórmula obtida em (a) para calcular exactamente

$$J = \int_{-1}^0 \frac{1 - x + x^2}{x^2+1} dx.$$

(c) Calcule o valor aproximado do integral definido em (b) usando a fórmula de integração de Gauss-Legendre com 3 nós de integração.

[**8.19**] Considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

(a) Aproxime $I(f)$ pela fórmula de Gauss-Chebyshev com 2, 4 e 6 nós de integração.

(b) Estime o erro utilizando a aproximação

$$E_n(f) \approx I_{n+2}(f) - I_n(f).$$

[**8.20**] Considere os integrais

$$I(f) = \int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx.$$

(a) Deduza uma fórmula de quadratura que seja exacta para $I(a+bx)$, usando um único nó de integração em $[0,1]$.

(b) Indique a fórmula composta, e calcule uma aproximação do integral $I(\cos(x^2))$ usando 4 subintervalos.

[**8.21**] Para aproximar o integral

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx,$$

considere a fórmula de quadratura

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1),$$

com $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_1 = 2 + \sqrt{2}$. Determine os pesos A_0 e A_1 de tal modo que a fórmula seja pelo menos de grau 1. Mostre que a fórmula assim obtida é de grau 3.

[8.22]* Deduza as fórmulas de quadratura de Gauss de ordens $n = 0, 1, 2$ para calcular integrais da forma

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx.$$

Sugestão. Utilize os polinómios de Laguerre.

Nota. $I(x^k) = k!, \quad k \in \mathbb{N}_0$.

[8.23] Utilize as fórmulas de Newton-Cotes fechadas com $n = 2, 4, 6, 10$ e 14 para aproximar o integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Compare os resultados com a solução exacta $I = 2 \arctan 4 \approx 2.65163533$. Comente.

[8.24] Considere a equação integral (de Volterra de segunda espécie)

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) y(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le b. \tag{1}$$

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos equidistantes do intervalo $[0, b]$, com $h = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$ e seja $y(0) = f(0)$. Pretende-se aproximar os valores da solução da equação (1) nos pontos $x_i, i = 0, \ldots, n$, pelo método numérico descrito no quadro seguinte.

Aplique o método para aproximar a equação integral

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) y(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le 1,$$

com $n = 10, 20$ e 40. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6}.$$

Com base nos resultados obtidos, analise a ordem de convergência do método.

MÉTODO

Para a solução exacta tem-se

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_0^{x_i} K(x_i, t) y(t)\, dt, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Para aproximar o integral

$$I(K, y) = \int_0^{x_i} K(x_i, t) y(t)\, dt,$$

usa-se uma quadratura numérica. Por exemplo, usando a regra dos trapézios composta, obtém-se

$$I(K, y) \approx Q_1^i(K, y) = h\left[\frac{1}{2}\, K(x_i, 0) y(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) y(x_j) + \frac{1}{2}\, K(x_i, x_i) y(x_i)\right].$$

Segue-se que a solução aproximada $Y_i, i = 1, \ldots, n$, satisfaz a equação

$$Y_i = f(x_i) + h\Big[\frac{1}{2} K(x_i, 0) f(0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) Y_j + \frac{1}{2} K(x_i, x_i) Y_i\Big], \tag{2}$$

ou seja, uma vez conhecidos os valores de Y_j para $j \leq i - 1$, a aproximação Y_i é obtida da equação (2).