INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios[1]

[7.1]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine de entre os polinómios $p \in \mathcal{P}_1$ aquele que minimiza a *distância*

$$d(f,p) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - p(x_i)]^2 \right]^{1/2} .$$

(b) Idem para $p \in \mathcal{P}_2$.

(c) Idem para $p \in \mathcal{P}_3$.

(d) Determine em cada um dos casos o valor mínimo da *distância* $d(f,p)$.

Nota: $\mathcal{P}_m$ designa o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a $m \in \mathbb{N}$.

[7.2] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1º grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

(b) Idem, mas para o polinómio do 2º grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M$, $\forall x \in [1.2, 1.5]$, obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.
Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

(d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau?

[7.3] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = 6, \quad f(2) = 15.$$

[1] O asterisco * a seguir ao número do exercício indica “exercício recomendado”.

Obtenha a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = ax + b,$$

que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6,$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

[7.4]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0

Determine de entre os polinómios trigonométricos da forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x) + a_2 \cos(2\pi x),$$

aquele que minimiza a *distância*

$$d(f, \phi) = \left[\sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

[7.5] Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x},$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

[7.6] Considere os pontos

$$(-5, -1), \quad (-3, 0), \quad (-1, -1), \quad (1, 2).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2,$$

que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.

(c) O mesmo que em (a) para

$$g(x) = \frac{a + bx^2}{x + 1}.$$

[**7.7**] Considere a aproximação por mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 2),$$

por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3,$$

com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(\pi x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Mostre que a matriz do sistema normal não é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k.

[**7.8**] Considere os 6 pontos

$$(-1, 7), \quad (0, 6), \quad (1, 6), \quad (2, 4), \quad (4, 3), \quad (5, 1).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a - x + bx^2,$$

cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) O mesmo que em (a) usando

$$g(x) = ae^{bx} - \frac{x^2}{4},$$

e uma transformação de variáveis.

[**7.9**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados.
Sugestão: Poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis.

[**7.10**]* Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	5.43656	2.0	0.735759	0.270671

Determine de entre as funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(x) = \frac{1}{ax+b}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\},$$

aquela que minimiza a *distância*

$$d(f,\phi) = \left[\sum_{i=0}^{3} [f(x_i) - \phi(x_i)]^2\right]^{1/2}.$$

[7.11] Considere Q uma matriz simétrica definida positiva e o produto interno definido em $\mathbb{R}^N$ por

$$\langle v, w\rangle_Q = v^\top Q w.$$

Supondo que queremos aproximar uma lista de pontos cujas ordenadas estão no vector $y \in \mathbb{R}^N$ por uma função

$$g = a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m,$$

onde $\phi_1, \ldots, \phi_m$ são funções linearmente independentes (para a lista de abcissas), mostre que o sistema a resolver pode escrever-se na forma

$$X^\top Q X\, a = X^\top Q\, y,$$

onde X é uma matriz $N \times m$ e $a = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_m]^\top$.

[7.12] **(a)** Determine qual a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a + cx^2,$$

que melhor aproxima $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$ segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) Qual o erro no ponto $x = 1$, e qual o maior erro $|f(x) - g(x)|$ nesse intervalo.

[7.13] Demonstre a seguinte propriedade dos polinómios de Chebyshev $T_n(x), n = 0, 1, \ldots$:

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0 \end{cases}.$$

[7.14]* Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a *melhor aproximação mínimos quadrados* da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in C([a,b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \forall g,h \in C([-1,1]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

(c)

$$\langle g,h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in \tilde{C}(\mathbb{R}),$$

onde $\tilde{C}(\mathbb{R})$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[g(x)]^2\,dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Hermite.

(c)

$$\langle g,h\rangle = \int_{0}^{\infty} e^{-x} g(x)h(x)\,dx, \qquad \forall g,h \in \tilde{C}([0,\infty[),$$

onde $\tilde{C}([0,\infty[)$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{0}^{\infty} e^{-x}[g(x)]^2\,dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Laguerre.

[7.15] Considere a função

$$f(x) = \arccos x, \qquad x \in [-1,1].$$

Determine o polinómio $q_2^* \in \mathcal{P}_2[-1,1]$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{[f(x)-q(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad q \in \mathcal{P}_2[-1,1].$$

[7.16] Pretende-se obter a função

$$g(x) = a + b(2x^2-1) + c(4x^3-3x),$$

que melhor aproxima $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, no intervalo $]-1,1[$, de forma a minimizar a distância dada por

$$d(f,g) = \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{[f(x)-g(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \right\}^{1/2}.$$

(a) Determine os valores a, b, c que melhor efectuam essa aproximação.

(b) Indique qual o valor mínimo para $d(f,g)$.

[7.17] Considere o espaço linear $C^1([a,b])$ e o operador definido por

$$L(f) = \left\{ \int_a^b \left[f'(x)\right]^2\, dx \right\}^{1/2}, \qquad f \in C^1([a,b]).$$

(a) Sabendo que

$$L(f+g) \leq L(f) + L(g), \qquad \forall f, g \in C^1([a,b]),$$

prove que L define um seminorma (que não é norma) em $C^1([a,b])$.

(b) Recorrendo à teoria da melhor aproximação e usando L, mostre que existem constantes reais $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ tais que

$$\int_a^b (\cos x + \bar{\alpha} x + \bar{\beta})^2\, dx \leq \int_a^b (\cos x + \alpha x + \beta)^2\, dx, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$