INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios[1]

[3.1] Para calcular a menor raiz positiva da equação

$$x^2 - 101x + 1 = 0,$$

considere as fórmulas

$$x = \frac{101 - \sqrt{101^2 - 4}}{2}, \qquad x = \frac{2}{101 + \sqrt{101^2 - 4}},$$

e ainda o método iterativo

$$x_0 = 0, \qquad x_{m+1} = \frac{x_m^2 + 1}{101}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Use cada um dos referidos métodos e comente a precisão dos resultados obtidos sabendo que o valor da raiz é 0.0099019608794976148...

[3.2] Tente localizar os zeros do polinómio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

no intervalo [0.975, 1.035] estudando as mudanças de sinal ocorridas em pontos distanciados de 0.001. Não utilize a simplificação

$$p(x) = (x - 1)^4,$$

que fornece imediatamente a única raiz do polinómio.

[3.3]* Considere a equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma e uma só raiz z no intervalo $[-3.5, -2.5]$.

(b) Utilize o método da bissecção para determinar um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.05.

(c) Determine o número de iteracções do método da bissecção suficientes para garantir que o erro absoluto do valor aproximado da raiz z seja inferior a 10^{-6}.

[1] O asterisco * a seguir ao número do exercício indica "exercício recomendado".

[3.4] Considere a equação
$$\sin x - e^{-x} = 0.$$

(a) Mostre que esta equação tem uma raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

(b) Efectue uma iteração pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha z.

(c) Determine o número m de iterações do método da bissecção necessárias para garantir que $|z - x_m| < 10^{-6}$.

[3.5]* Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem apenas três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-1, 0], \qquad z_2 \in [0, 1], \qquad z_3 \in [4, 5].$$

(b) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2},$$

converge para z_2, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(c) Determine um valor aproximado da raiz z_2 pelo método da alínea (b) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(d) Mostre que não é possível usar o método da alínea (b) para obter um valor aproximado da raiz z_3, embora z_3 seja um ponto fixo de g.

[3.6]* Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0.$$
para a qual foi verificado na alínea (a) do Exercício [3.5] que tem apenas três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$.

(a) Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \log(4x^2),$$

converge para z_3, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [4, 5]$.

(b) Determine um valor aproximado da raiz z_3 pelo método da alínea (a) com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c) Mostre que não é possível usar o método da alínea (a) para obter valores aproximados das raízes z_1 e z_2.

[3.7] Considere a equação
$$f(x) = 1 - 2x + 2e^{-x} = 0,$$

e o seguinte método iterativo:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m + \frac{f(x_m)}{2+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real z tal que $z \in [0, 1]$.

(b) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método iterativo converge para a raiz z, qualquer que seja $x_0 \geq 0$.
Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

(c) Determine valores aproximados da raiz z com um erro inferior a 10^{-5} usando o método iterativo com $\alpha = 0.4$ e $\alpha = 0.8$. Considere em ambos os casos $x_0 = 2$.

(d) Determine o valor de α para o qual a convergência do método iterativo para a raiz z é a mais rápida possível.

[3.8]* Considere os seguintes métodos iterativos:

$$(1)\ x_{m+1} = g_1(x_m), \quad m \geq 0, \qquad g_1(x) = -16 + 6x + \frac{12}{x}, \quad x \neq 0;$$

$$(2)\ x_{m+1} = g_2(x_m), \quad m \geq 0, \qquad g_2(x) = \frac{12}{1+x}, \quad x \neq -1;$$

$$(3)\ x_{m+1} = g_3(x_m), \quad m \geq 0, \qquad g_3(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0;$$

$$(4)\ x_{m+1} = g_4(x_m), \quad m \geq 0, \qquad g_4(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}, \quad a > 0.$$

Determine em cada um dos casos:

(a) os pontos fixos de g_i para os quais o método converge;

(b) a ordem de convergência do método;

(c) o factor assimptótico de convergência.

[3.9]* Considere uma sucessão $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ e outra $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ construída a partir da primeira pela fórmula

$$y_m = x_m - \frac{(x_{m+1} - x_m)^2}{x_{m+2} - x_{m+1} - (x_{m+1} - x_m)} = \frac{x_m x_{m+2} - x_{m+1}^2}{x_{m+2} - 2x_{m+1} + x_m},$$

para $m \geq 0$.

(a) Pondo $x_m = z - e_m$ verifique que y_m se pode escrever na forma

$$y_m = z - \frac{e_m e_{m+2} - e_{m+1}^2}{e_{m+2} - 2e_{m+1} + e_m}.$$

(b) Mostre que se $\{x_m\}$ converge linearmente para z então $\{y_m\}$ converge para z mais depressa do que $\{x_m\}$.

Sugestão: Pondo $e_{m+1} = e_m(K + \delta_m)$, onde $0 < K < 1$ e $\delta_m \to 0$, quando $m \to \infty$, exprima $z - y_m$ em termos de δ_m, δ_{m+1} e K, e finalmente verifique que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - y_m}{z - x_m} = 0.$$

(c) Tomando $x_0 = 6,\ x_{m+1} = g(x_m),\ m \geq 0$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6.28 + \sin x$, e $z = 6.01550307297\ldots$ calcule $x_m, z - x_m$ para $m = 0, 1, \ldots, 9$ e $y_m, z - y_m$ para $m = 0, 1, \ldots, 7$.

Nota. A utilização da sucessão $\{y_m\}$ para acelerar a convergência da sucessão $\{x_m\}$ é conhecida pelo método Δ^2 de Aitken para aceleração da convergência de uma sucessão.

[3.10] Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0.$$

(a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

(b) Considere a seguintes sucessões

$$\text{(S1)}\ \ x_{m+1} = \sqrt{\frac{e^{x_m}}{3}}; \qquad\qquad \text{(S2)}\ \ x_{m+1} = \ln(3x_m^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma dessas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

(c) Efectue duas iterações usando a sucessão (S1) com $x_0 = 1$. Estime o número de algarismos significativos da aproximação obtida.

(d) Será possível usar a sucessão (S1) para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão (S2) para aproximar a menor raiz positiva da equação?

(e) Determine uma função iteradora g tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

[3.11] Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad\qquad x_{m+1} = 1 - \frac{1}{bx_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

onde b é um número real dado.

(a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) Considere $b = \frac{25}{4}$. Usando a definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{m\to\infty} x_m$.

(c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ e que se verifica

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^m, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

[3.12] Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2+1).$$

(a) Prove que a sucessão definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, converge para um número $z \in [-1, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Determine z e a ordem de convergência.

(b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2},\quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2},\quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2},\ \ldots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea (a)?

[3.13] A equação $x^2 = a$, com $a > 0$, pode escrever-se sob a forma $x = g(x)$, onde $g(x) = a/x$, $x \neq 0$. Considere o método do ponto fixo para aproximar a raiz positiva da equação. Mostre que o método é divergente qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \neq \sqrt{a}$.

[3.14] Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{14}\left(1 + e^x + x^3\right).$$

(a) Sendo $\{x_m\}$ a sucessão numérica definida por $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, mostre que esta sucessão tem um limite finito $z \in [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo [2,3]. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

[3.15] Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = g(x)$, onde $g \in C^1(\mathbb{R})$, pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789, \qquad x_5 = 0.43814.$$

Sabendo que $|g'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

[3.16] Considere os métodos iterativos:

$$(1)\quad x_{m+1} = g_1(x_m), \quad m = 0, 1, \ldots, \qquad g_1(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x);$$

$$(2)\quad x_{m+1} = g_2(x_m), \quad m = 0, 1, \ldots, \qquad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}.$$

(a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

(b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro inferior a 10^{-6}. Determine a ordem da convergência para cada uma das iterações?

[3.17] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Aproxime, com um erro inferior a 10^{-4}, todas as raizes da equação $f(x) = 0$.

[3.18] Pretende-se determinar um valor x que verifique a equação

$$\cos(x) = -\cos(x + a\cos(x)).$$

(a) Mostre que se $a \neq 0$ isso é equivalente a encontrar $z = g(g(z))$, com

$$g(x) = x + a\cos(x),$$

e que se $a = 1$, g tem um único ponto fixo no intervalo $I = [1, 3]$. Justifique que para $a = 1$ a solução da equação é única em I e coincide com o ponto fixo de g.

(b) Considere os valores de (a). Calcule duas iterações pelo método do ponto fixo aplicado à função g começando com $x_0 = \pi/2$ e com $x_0 = 1$. O que pode concluir? Calcule o valor exacto do erro $|e_2|$ com 8 dígitos correctos, quando começa com $x_0 = 1$. Mostre que a ordem de convergência local é cúbica.

(c) Considere os valores de (a). Começando com $z_0 = 1$, e sendo $z_m = g(z_{m-1})$, considere os pontos (x_m, y_m) com $x_m = \log|z - z_m|$ e $y_m = \log|z - z_{m+1}|$, onde z é o ponto fixo de g. Quando $m \to \infty$ os pontos (x_m, y_m) irão aproximar-se de uma recta $y = \alpha x + \beta$. Determine os valores dos coeficientes α e β.

[3.19] Mostre que, para $a > b \geq 1$, a sucessão

$$x_0 = 1, \qquad x_{m+1} = a + \frac{b}{x_m}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

converge alternadamente para a solução da equação $x^2 - ax - b = 0$ que se encontra no intervalo $[a, a+b]$.

Nota. Esta sucessão define aquilo que se designa por uma *fracção contínua*, ou seja,

$$x = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots}}}$$

no caso particular em que $a_m = a, b_m = b$.

[3.20] Ao utilizar o método do ponto fixo para determinar uma raiz de uma equação, foram obtidos os valores

$$x_3 = -0.914260304, \qquad x_4 = -0.825329540,$$
$$x_5 = -0.884002249, \qquad x_6 = -0.847330076.$$

(a) Sabendo que a função iteradora era um polinómio do quarto grau, da forma $p(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, determine aproximadamente as duas raízes reais da equação.

(b) Determine os valores possíveis para x_2.

(c) Determine uma estimativa para a majoração do erro absoluto em x_{20}.

[**3.21**] Seja $g \in C([a, b])$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

(a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

(b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$ então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. O que pode concluir quanto à contractividade de g nesse intervalo?

[**3.22**] Considere

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x),$$

uma equação em $\mathbb{R}$ e sejam z_1 e z_2 duas raízes consecutivas da equação (ou seja, não existe nenhuma outra raiz entre elas).

(a) Mostre que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $|g'(z_1)| < 1$ então $g'(z_2) \geq 1$.

(b) Suponha que $z_2 \in I = [a, b]$, que $|g'(x)| > 1$, $\forall x \in I$, e que $I \subseteq g(I)$. Mostre que o método iterativo $x_{m+1} = g^{-1}(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, converge para z_2 qualquer que seja $x_0 \in I$.

(c) Seja $f \in C^p(\mathbb{R})$, tal que a raiz z_2 tem multiplicidade $p \geq 1$, e seja g tal que $g'(z_2) > 1$. Indique uma função iteradora que assegure uma convergência local linear para z_2, e uma outra que assegure convergência quadrática, para cada caso de p.

[**3.23**] Considere um intervalo $I = [a, b]$ que tem um único ponto fixo z de uma função $g \in C^1(I)$. Seja $g'(z) = 1$.

(a) Mostre que se $0 < g'(x) < 1, \forall x \in I \backslash \{z\}$, então o método do ponto fixo converge qualquer que seja $x_0 \in I$.
Sugestão: Verifique que a sucessão definida pelo método do ponto fixo é estritamente monótona e limitada.

(b) Aplique este resultado para mostrar que $x_{m+1} = \sin(x_m)$ converge para 0, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

[**3.24**]* Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16.$$

(a) Mostre que o polinómio tem três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(b) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [1.0, 1.2]$ converge para a raiz z_1.

(c) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.25]* Considere o polinómio do Exercício [3.24].

(a) Mostre que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [2.6, 2.8]$ converge para a raiz z_2.

(b) Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.26]* Determine, usando o método de Newton, com um erro inferior a 10^{-6}, o valor mínimo de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a\sqrt{x} \geq \sin x, \qquad \forall x \geq 0.$$

[3.27]* Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt[p]{c}$, onde $c > 0$ e $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$:

(1) O método de Newton aplicado à função $f(x) = x^p - c$;

(2) O método de Newton aplicado à função $F(x) = x^q f(x),\ q \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que o método (1) converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(b) Determine o valor de q para o qual o método (2) tem ordem de convergência 3.

(c) Mostre que o método (2), com $q = \dfrac{1-p}{2}$, converge para $\sqrt[p]{c}$ para qualquer valor inicial $x_0 > 0$.

(d) Calcule $\sqrt[3]{231}$ com um erro absoluto inferior a 10^{-9}, usando:

(i) o método (1);

(ii) o método (2), com $q = -1$.

[3.28] Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ da equação do Exercício 3.5.

(a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a ordem de convergência do método.

(b) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1. Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.

[3.29] Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0,$$

no intervalo [1, 2]. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Que tipo de convergência se tem? Indique uma estimativa para o erro absoluto de x_3.

[3.30] Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

(a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6, 3] estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Calcule um majorante para o erro da segunda iterada (não efectue iterações).

[3.31] Mostre que a equação

$$\ln x - (x-2)^2 = 0,$$

tem duas e só duas raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$. Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência e efectue uma iteração.

[3.32] Para calcular a raiz quadrada do número $a > 0$ recorre-se frequentemente ao método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = \frac{1}{2}(x_m + \frac{a}{x_m}), \qquad m = 0, 1, \ldots$$

(a) Verifique que esta fórmula corresponde à utilização do método de Newton para resolver o problema.

(b) Mostre que o erro do método satisfaz a condição

$$e_{m+1} = -\frac{e_m^2}{2x_m},$$

onde $e_m = z - x_m$ e z é a raiz.

[3.33] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^4. Considere a seguinte modificação do método de Newton para a aproximação dos zeros de f:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{\Phi(x_m)}{\Phi'(x_m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

onde $\Phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostre que o método tem ordem de convergência quadrática também no caso em que os zeros de f são múltiplos.

[3.34] Construa uma tabela com valores de y para os valores de $x = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$, onde y é definido implicitamente em função de x pela expressão

$$3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 = 3,$$

utilizando o método de Newton.

[3.35]* Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 16,$$

para o qual foi verificada no Exercício [3.24] a existência de três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [1.0, 1.2], \qquad z_2 \in [2.6, 2.8], \qquad z_3 \in [5.0, 5.2].$$

(a) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [5.0, 5.2]$ converge para a raiz z_3.

(b) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.36]* Considere a equação

$$x^3 - \cos x - 1 = 0.$$

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz real, z, tal que $z \in [1, 2]$.

(b) Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [1, 2]$ converge para a raiz z.

(c) Utilize o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

[3.37] Considere a função

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

(a) Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

(b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

(c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

(d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em (b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

[3.38] Considere a equação

$$f(x) = x\tan(x) - 1 = 0.$$

Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

[**3.39**] Considere a equação

$$e^x + x^2 - 2 = 0.$$

(a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5,\ 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I daquele intervalo que contenha a raiz.

(b) Escolha duas iteradas iniciais x_0 e x_1 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_2.

(c) Indique uma majoração do erro absoluto da iterada x_3 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

[**3.40**] Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

(a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

(b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1, x_1 = 2$, verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

[**3.41**] Sabendo que $h \in C^2(I)$ e $h' \in C^1(I)$ são funções crescentes, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação

$$f(x) = x + h(x) = 0,$$

usando o método

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad x_{m+1} = x_m - \frac{(x_m - x_{m-1})f(x_m)}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Verifique que f tem uma raiz única em I e que existem valores a, $b \in I$ para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

[**3.42**] A equação

$$e^{-x} - \sin(7x) = 0,$$

possui uma única raiz no intervalo $[0.5,\ 1.0]$. Compare as iteradas obtidas pelo método da bissecção e pelo método da secante com iteradas iniciais $x_0 = 0.5, x_1 = 1.0$.