# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

**Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

**Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º**

## MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

**Exercícios**[1]

**[2.1]** Seja $N$ uma norma num espaço vectorial $E$. Mostre que

$$\|x-y\|_N \ \geq\ \left|\|x\|_N - \|y\|_N\right|, \qquad \forall x,y\in E.$$

**[2.2]** Sejam $p,q\in\,]1,\infty[$ expoentes conjugados, isto é, tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

**a)** Demonstre a desigualdade de Young,

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}, \qquad \forall\, a,b\geq 0.$$

**b)** Demonstre a desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q}, \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{C}^n.$$

**c)** Mostre que a *norma-p*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1\leq p<\infty,$$

satisfaz à *desigualdade de Minkowski* (desigualdade triangular)

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p, \qquad \forall x,y\in\mathbb{C}^n.$$

**[2.3]** Chama-se *esfera unitária* em $\mathbb{R}^n$ segundo a norma-$p$ ao subconjunto

$$S_p=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p=1\}, \qquad 1\leq p\leq\infty.$$

Represente graficamente no plano $\mathbb{R}^2$ as esferas unitárias $S_p$.

**[2.4]*** Sendo $x\in\mathbb{C}^n$ mostre que:

[1] O asterisco * a seguir ao número do exercício indica "exercício recomendado".

**(a)** $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$; **(b)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$;

**(c)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$; **(d)** $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$;

**(e)** $\dfrac{1}{n}\,\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$; **(f)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

[**2.5**]$^*$ Sendo $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ determine a ordem de convergência das sucessões com o seguinte termo geral:

**a)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^a}$; **b)** $v_n = 1 + \dfrac{1}{a^n}$;

**c)** $x_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^n}}$; **d)** $y_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^{n^2}}}$;

**e)** $w_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{4^n}$.

[**2.6**] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Esta solução é conhecida como **sucessão de Fibonacci**. Mostre que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

[**2.7**]$^*$ Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+3} - 8x_{m+2} + 20x_{m+1} - 16x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4. \end{cases}$$

[**2.8**] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\,x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\,x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta$ são números reais.