INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Resolução do Exame e Testes de 2.JUL.2008

[1][10]

$n = 1: \quad fl(a) = fl(b) = 0.3 \times 10^9$

$n = 2: \quad fl(a) = fl(b) = 0.33 \times 10^9$

$n = 3: \quad fl(a) = fl(b) = 0.335 \times 10^9$

$n = 4: \quad fl(a) = fl(b) = 0.3348 \times 10^9$

$$n = 5: \quad \begin{cases} fl(a) = 0.33484 \times 10^9, \\ fl(b) = 0.33483 \times 10^9, \end{cases}$$

$$n = 6: \quad \begin{cases} fl(a) = 0.334836 \times 10^9, \\ fl(b) = 0.334835 \times 10^9, \end{cases}$$

$$n = 7: \quad \begin{cases} fl(a) = 0.3348355 \times 10^9, \\ fl(b) = 0.3348345 \times 10^9, \end{cases}$$

$$fl(fl(a) - fl(b)) = \begin{cases} 0, & 1 \le n \le 4 \\ 0.1 \times 10^5, & n = 5 \\ 0.1 \times 10^4, & n \ge 6 \end{cases}$$

[2]

(a)[15 ou 20]

$$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{x^2} =: g(x), \quad x \neq 0$$

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad g''(x) = \frac{6}{x^4}$$

A função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfaz às seguintes três condições:

(i) $g \in C^2(I)$, onde $I = [1.35, 1.55]$

(ii) $\max_{x \in I} |g'(x)| = |g'(1.35)| = 0.812884 < 1$,

pois g' é negativa e crescente em I.

(iii) $g(I) \subset I$,

pois $g(1.35) = 1.5487 \in I, \;\; g(1.55) = 1.41623 \in I$,
e g é decrescente em I.

O teorema do ponto fixo permite-nos concluir que g tem um único ponto fixo em I e que a sucessão x_n, definida por $x_{n+1} = g(x_n), \;\; x_0 \in I$,
converge para esse ponto fixo, que é também o único zero real de p.

(b)[15]

Estimativa de erro do método do ponto fixo:

$$|z - x_m| \leq L^m \, |z - x_0|, \qquad L = \max_{x \in I} |g'(x)| = 0.812884$$

$$L^m \, |z - x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad m > \frac{\log \varepsilon - \log |z - x_0|}{\log L}$$

$$|z - x_0| < 1.55 - 1.35 = 0.20, \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

$$m > 58.919 \quad \Rightarrow \quad m = 59$$

[3]

(a)[15]

Condições suficientes de convergência do método da secante para
$z \in [0.5, 0.6] =: I, \;\; \forall x_0, x_1 \in I$:

(o) $f \in C^2(I)$

(i) $\left. \begin{array}{l} f(0.5) = -0.124987 \\ f(0.6) = 0.0791442 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; f(0.5) f(0.6) < 0$

(ii) $f'(x) = 2 + \sin x - \dfrac{1}{2} \cos \dfrac{x}{2} > 0, \;\; \forall x \in I$

pois $\; -1 \leq \sin x \leq 1, \;\; -1 \leq \cos \dfrac{x}{2} \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $f''(x) = \cos x + \dfrac{1}{4} \sin \dfrac{x}{2} > 0, \;\; \forall x \in I$

pois $\; \cos x > 0, \;\; \sin \dfrac{x}{2} > 0, \quad \forall x \in I$

(iv) $\left| \dfrac{f(0.5)}{f'(0.5)} \right| = 0.0626508 < 0.1 = 0.6 - 0.5$

$\left| \dfrac{f(0.6)}{f'(0.6)} \right| = 0.0379229 < 0.1$

(b)[15 ou 20]

Método da secante:

$$x_m = x_{m-1} - f(x_{m-1})\,\frac{x_{m-1} - x_{m-2}}{f(x_{m-1}) - f(x_{m-2})}, \qquad m \geq 2, \qquad x_0, x_1 \in I$$

Estimativa de erro:

$$|z - x_m| \leq K|z - x_{m-1}||z - x_{m-2}|, \qquad K = \frac{\max_{x\in I}|f''(x)|}{2\min_{x\in I}|f'(x)|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x\in I}|f'(x)| = |f'(0.5)| = 1.99497 \\ \max\limits_{x\in I}|f''(x)| = |f''(0.5)| = 0.939434 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad K = 0.235451$$

$x_0 = 0.5, \qquad |z - x_0| \leq 0.1$

$x_1 = 0.6, \qquad |z - x_1| \leq 0.1$

$x_2 = 0.561229, \qquad |z - x_2| \leq 0.235 \times 10^{-2}$

$x_3 = 0.561756, \qquad |z - x_3| \leq 0.554 \times 10^{-3} < 10^{-3}$

$z = 0.561756 + \Delta, \qquad |\Delta| \leq 0.554 \times 10^{-3}.$

[4][15]

Matriz iteradora do método: $C(\omega) = I - \omega A$

Condição necessária e suficiente de convergência: $r_\sigma(C(\omega)) < 1$

$$\begin{aligned} \det(C(\omega) - \lambda I) &= \det((1-\lambda)I - \omega A) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda-\omega & -2\omega \\ 2\omega & 1-\lambda-\omega \end{bmatrix} \\ &= (1-\omega-\lambda)^2 + 4\omega^2 \end{aligned}$$

Valores próprios de $C(\omega)$: $\lambda_{1,2} = 1 - \omega \pm i2\omega$

$$r_\sigma(C(\omega)) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = [(1-\omega)^2 + 4\omega^2]^{1/2} = [1 - \omega(2 - 5\omega)]^{1/2}$$

$$r_\sigma(C(\omega)) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \omega < \frac{2}{5}$$

$$\frac{dr_\sigma(C(\omega))}{d\omega} = \frac{-1+5\omega}{r_\sigma(C(\omega))}, \qquad \frac{d^2 r_\sigma(C(\omega))}{d\omega^2} = \frac{4}{[r_\sigma(C(\omega))]^3}$$

O método convergirá mais rapidamente para $\omega = \dfrac{1}{5}$,

valor para o qual o raio espectral tem o valor mínimo, $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

[5][15]

Método de Newton generalizado:

$$\begin{cases} x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}, \\ J_f(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = -f(x^{(0)}) \end{cases}$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 8x_1 & -2x_2 \\ -\cos x_1 & 2+\sin x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -0.968912 & 2.47943 \end{bmatrix} \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.124987 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.99497 \end{bmatrix} \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.124987 \end{bmatrix}$$

$$\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0313255 \\ 0.0626509 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.281326 \\ 0.562651 \end{bmatrix}$$

[6][15 ou 20]

$$p_3(x) = p_2(x) + f[-1,1,3,2](x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f[-1,1,3,2] = \frac{f[-1,1,2]-f[-1,1,3]}{2-3}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
-1	11		
		-2	
1	7		6
		22	
3	51		

$$f[-1,1,3] = 6$$

$$f[-1,1,3,2] = 2$$

$$p_3(x) = p_2(x) + 2(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f(x) = p_3(x) + f[-1,1,3,2,x](x+1)(x-1)(x-3)(x-2)$$

$$f[-1,1,3,2,x] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}, \qquad \xi \in]-1;1;3;2;x[$$

$$f[-1,1,3,2,x] = \frac{48}{4!} = 2$$

$$f(x) = p_3(x) + 2(x+1)(x-1)(x-3)(x-2)$$

[7]

(a)[15]

Melhor aproximação mínimos quadrados da função f por uma função ϕ da forma $\phi(x) = a + bx^2$ em relação ao produto interno definido por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{-1}^{1} \phi(x)\psi(x)\,dx, \qquad \forall \phi, \psi \in C([-1,1])$$

$$E(a,b) = \langle f - \phi, f - phi \rangle$$

$$\phi^*(x) = a^*\phi_0(x) + b^*\phi_1(x), \qquad \phi_0(x) = 1, \qquad \phi_1(x) = x^2$$

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\langle \phi_0, \phi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle \phi_1, \phi_0 \rangle = \langle \phi_0, \phi_1 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$\langle f, \phi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx \end{bmatrix}$$

(b)[15 ou 20]

Fórmula dos trapézios composta ($F \in C([a,b])$):

$$I(F) = \int_a^b F(x)\,dx \quad \approx \quad I_1^{(M)}(F) = \frac{h_M}{2}\left[F(x_0) + F(x_M) + 2\sum_{j=1}^{M-1} F(x_j)\right]$$

$$h_M = \frac{b-a}{M}, \qquad x_j = a + jh_M, \quad j = 0,1,\ldots,M$$

$$M = 4, \quad a = -1, \ \ b = 1, \quad h_M = \frac{1}{2}, \quad x_j = -1 + \frac{j}{2}, \ j = 0,1,2,3$$

$$F(x) = x^2 f(x) = x^2 \exp(x^2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_2 &= \frac{1}{4}\ \left[F(-1) + F(1) + 2\left(F\left(-\tfrac{1}{2}\right) + F(0) + F\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{2}\,e^{1/4}\right)\\ &= 1.68015\end{aligned}$$

Estimativa de erro da fórmula dos trapézios composta ($F \in C^2([a,b])$):

$$\left|E_1^{(M)}(F)\right| = \left|I(F) - I_1^{(M)}(F)\right| \leq \frac{b-a}{12}\,h_M^2 \max_{x\in[a,b]} |F''(x)|$$

$$F(x) = x^2 f(x) = x^2 \exp(x^2)$$

$$|w_2 - \tilde{w}_2| \leq \frac{1}{24} \max_{x\in[-1,1]} |F''(x)|$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |F''(x)| = F''(1) = 16e$$

$$|w_2 - \tilde{w}_2| \leq \frac{2e}{3} \approx 1.81$$

[8][15]

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$I_1(x^m) = I(x^m), \qquad m = 0,1,2,3$$

$$\left\{\begin{array}{ll} I_1(1) = w_0 + w_1, & I(1) = \dfrac{2b^3}{3} \\ I_1(x) = w_0 x_0 + w_1 x_1, & I(x) = 0 \\ I_1(x^2) = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2, & I(x^2) = \dfrac{2b^5}{5} \\ I_1(x^3) = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3, & I(x^3) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} w_0 + w_1 = \dfrac{2b^3}{3} \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0 \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \dfrac{2b^5}{5} \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = \dfrac{b^3}{3} \\ -x_0 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}\, b = x_1 \end{cases}$$

$$I_1(f) = \frac{b^3}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\, b\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, b\right)\right]$$

[9]

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

(a)[15] Método de Taylor de 2ª ordem (passo h):

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\,(d_f f)(x_0, y_0)$$

$$(d_f f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2x + f(x,y)2y$$

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 2$$

$$f(x_0, y_0) = 5, \qquad (d_f f)(x_0, y_0) = 22$$

$$y_1 = 2 + 5h + 11h^2$$

(b)[15] Método de Adams-Bashforth de 2ª ordem (passo h):

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + \frac{h}{2}\left[3f(x_1, \tilde{y}_1) - f(x_0, y_0)\right]$$

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 2, \qquad x_1 = 1 + h, \qquad \tilde{y}_1 = 2 + 5h + 11h^2$$

$$\tilde{y}_2 = 2 + 5h + 11h^2 + \frac{h}{2}\left[3(1+h)^2 + 3(2 + 5h + 11h^2)^2 - 5\right]$$

$$\tilde{y}_2 = 2 + 10h + 44h^2 + 105h^3 + 165h^4 + \frac{363}{2}\,h^5$$

[10][10]

$$W'(x) = F(x, W(x)), \qquad W = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \qquad F(x, W) = \begin{bmatrix} z \\ g(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Método de Runge-Kutta clássico de 2ª ordem (passo h):

$$W_1 = W_0 + \frac{h}{4}\left[F(x_0, W_0) + 3F(\tilde{x}_0, \tilde{W}_0)\right]$$

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \frac{2h}{3}, \qquad \tilde{W}_0 = W_0 + \frac{2h}{3}F(x_0, W_0)$$

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 2, \qquad z_0 = 3, \qquad g(x_0, y_0, z_0) = 14$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad F(x_0, W_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_0 = 1 + \frac{2h}{3}$$

$$\tilde{W}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2h \\ 3 + \frac{28h}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) &= \left(1 + \frac{2h}{3}\right)^2 + (2 + 2h)^2 + \left(3 + \frac{28h}{3}\right)^2 \\ &= 14 + \frac{196h}{3} + \frac{784h^2}{9} \end{aligned}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{h}{4}\left[3 + 3\left(3 + \frac{28h}{3}\right)\right] \\ 3 + \frac{h}{4}\left[14 + 3\left(14 + \frac{196h}{3} + \frac{784h^2}{9}\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 + 3h + 7h^2 \\ z_1 = 3 + 14h + 49h^2 + \dfrac{196h^3}{3} \end{cases}$$