INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 2º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame e Testes de 2 de Julho de 2008

	Exercícios										Duração
1º Teste	$[1]^{10}$	$[2]^{30}$	$[3]^{30}$	$[4]^{15}$	$[5]^{15}$						2 horas
2º Teste						$[6]^{15}$	$[7]^{30}$	$[8]^{15}$	$[9]^{30}$	$[10]^{10}$	2 horas
Exame		$[2]^{35}$	$[3]^{35}$	$[4]^{15}$	$[5]^{15}$	$[6]^{20}$	$[7]^{35}$	$[8]^{15}$	$[9]^{30}$		3 horas

Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere os números

$$a = \sum_{k=1}^{1000} (k+1)^2 = 334835500,$$
$$b = \sum_{k=1}^{1000} (k^2 + 2k) = 334834500.$$

Diga justificadamente como é que o valor de $a - b$, calculado num sistema de ponto flutuante FP(10, n, -10, 10), com arredondamento simétrico, depende do número de dígitos da mantissa, n.

[**2**] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - x^2 - 1.$$

(a) Mostre que a sucessão x_n definida por

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}, \qquad n \geq 0,$$

com $x_0 \in [1.35, 1.55]$, converge para z, a única raiz real de p.

(b) Determine o menor valor de n para o qual $|z - x_n| < 10^{-6}$.

[**3**] Considere a equação

$$f(x) := 2x - \cos x - \sin \frac{x}{2} = 0.$$

(a) Verifique as condições suficientes de convergência do método da secante para a única raiz z da equação no intervalo [0.5, 0.6].

(b) Utilize o método da secante com condições iniciais $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$ para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.001.

[**4**] Suponha que utiliza o método iterativo

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \omega\left(b - Ax^{(n)}\right), \qquad n \geq 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

para determinar uma solução aproximada do sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

e b é um vector arbitrário de $\mathbb{R}^2$. Determine o intervalo de valores do parâmetro ω para os quais está garantida a convergência do método e o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[**5**] Considere o sistema de equações não-lineares

$$f(x) = 0,$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_2 - \cos x_2 - \sin x_1 \end{bmatrix},$$

o qual tem uma solução única z no 1º quadrante de $\mathbb{R}^2$. Calcule um valor aproximado $x^{(1)}$ para a solução z do sistema usando uma iterada do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = \left[\frac{1}{4} \;\; \frac{1}{2}\right]^T$.

[**6**] Seja $f \in C^4(\mathbb{R})$ uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador

$$p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2.$$

Sabendo ainda que $f[-1, 1, 2] = 4$ e que $f^{(4)}(x) = 48, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

[**7**] Pretende aproximar-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(x^2)$ no intervalo $[-1, 1]$ por uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $\phi(x) = a + bx^2$ onde a, b são escolhidos por forma a minimizar o integral

$$E(a, b) = \int_{-1}^{1} [f(x) - \phi(x)]^2 \, dx.$$

(a) Mostre que os valores a^*, b^* que minimizam $E(a, b)$ são as componentes do vector y, solução do sistema linear $Ay = w$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \\ \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx \end{bmatrix}.$$

(b) Determine um valor aproximado $\tilde{w}_2$ para o integral w_2 usando a fórmula dos trapézios composta com 4 subintervalos e obtenha um majorante do erro absoluto $|w_2 - \tilde{w}_2|$.

Nota: Pode utilizar o resultado

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^2 f(x)] = 2(1 + 5x^2 + 2x^4) f(x).$$

[**8**] Determine a fórmula de integração de Gauss com dois nós de integração,

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1),$$

que aproxima o integral

$$I(f) = \int_{-b}^{b} x^2 f(x)\, dx,$$

onde $f \in C([-b, b])$ e b é uma constante positiva.

[**9**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + [y(x)]^2, & x \geq 1, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

(a) Obtenha um valor aproximado y_1 para $y(x_1)$, onde $x_1 = 1 + h$ e $h > 0$ é o passo, usando uma iterada do método de Taylor de 2ª ordem.

(b) Obtenha um valor aproximado $\tilde{y}_2$ para $y(x_2)$, onde $x_2 = 1 + 2h$ e $h > 0$ é o passo, usando uma iterada do método de Adams-Bashforth de 2ª ordem ($p = 1, q = 2$). Suponha que $\tilde{y}_1$ é o valor obtido na alínea (a). (Caso não tenha resolvido a alínea (a) tome $\tilde{y}_1 = 2 + 5h + 11h^2$).

Nota: Os resultados das alíneas (a) e (b) deverão vir expressos em termos de h.

[**10**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = x^2 + [y(x)]^2 + [y'(x)]^2, & x \geq 1, \\ y(1) = 2, \qquad y'(1) = 3. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados y_1 e z_1 para $y(x_1)$ e $y'(x_1)$, onde $x_1 = 1 + h$ e $h > 0$ é o passo, usando uma iterada do método de Runge-Kutta clássico de 2ª ordem.

Nota: O resultados deverão vir expressos em termos de h.