MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 8. Integração Numérica

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

8. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Introdução.

• Neste capítulo derivamos e analisamos métodos numéricos para calcular integrais definidos da forma

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

com $[a, b]$ finito. Estes métodos são necessários para o cálculo de integrais tais que:

- ◇ a primitiva da função integranda não é conhecida;
- ◇ embora conhecida a primitiva da função integranda é demasiado complicada, tornando mais rápido o cálculo numérico do integral;
- ◇ a integranda é conhecida apenas num número finito de pontos.

Além disso estes métodos de *integração numérica* ou *quadratura numérica* constituem uma ferramenta básica para a resolução numérica de equações diferenciais e equações integrais.

A maior parte dos métodos de integração numérica para calcular $I(f)$ encaixa-se no seguinte esquema: sendo f_n uma função aproximadora de f, define-se a **fórmula de integração ou quadratura numérica** por

$$I_n(f) := I(f_n).$$

f_n deve ser tal que $I(f_n)$ possa ser calculado facilmente. O erro de integração será calculado a partir do erro da função aproximadora f_n em relação a f:

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = I(f - f_n).$$

A maior parte das fórmulas de integração numérica usam para funções aproximadoras f_n os polinómios interpoladores p_n ou funções interpoladoras seccionalmente polinomiais. Estudaremos seguidamente:

- ◇ as fórmulas de integração de Newton-Cotes, em que os polinómios interpoladores são suportados em nós igualmente espaçados;
- ◇ as fórmulas de integração de Gauss, em que os polinómios interpoladores são suportados em nós cuidadosamente escolhidos, e que não são igualmente espaçados; estas fórmulas são óptimas num certo sentido e têm convergência muito rápida.
- ◇ as fórmulas compostas correspondentes.

As fórmulas de integração numérica assim obtidas têm a forma

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Os coeficientes $w_{j,n}$ são chamados os **pesos de integração** ou **pesos de quadratura**; os pontos $x_{j,n}$ são chamados os **nós de integração** ou **nós de quadratura**, normalmente escolhidos em $[a,b]$. A dependência em n é em geral suprimida, escrevendo-se w_j e x_j, mas subentendida implicitamente. Os métodos usuais de integração numérica têm nós e pesos com forma simples ou que são fornecidos em tabelas facilmente acessíveis. Não há em geral necessidade de construir explicitamente as funções aproximadoras f_n, embora seja útil ter presente o seu papel em definir $I_n(f)$.

Fórmulas de quadratura interpolatória polinomial (FQIP)

Proposição. Seja $f \in C([a,b])$ e $p_n \in \mathcal{P}_n$ o polinómio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos do intervalo $[a,b]$. A FQIP de ordem n de f é definida por:

$$I_n(f) := I(p_n),$$

e tem a forma

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}),$$

com pesos

$$w_{j,n} = I(l_{j,n}) = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}} \frac{x - x_{i,n}}{x_{j,n} - x_{i,n}}\, dx.$$

Dem.: $(\cdots)$

Notas. (i) $\mathcal{P}_n$ designa o conjunto de polinómios de grau menor ou igual a n.

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} w_{j,n} = b - a$

(iii) Sendo $f \in \mathcal{P}_n$, f coincide com o seu polinómio interpolador $p_n \in \mathcal{P}_n$ e, portanto,

$$I_n(f) = I(p_n) = I(f).$$

Proposição. Dados $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do intervalo $[a,b]$ a FQIP de ordem n é unicamente determinada pela propriedade de que integra exactamente todos os polinómios de grau menor ou igual a n, isto é,

$$I_n(q) = I(q), \qquad \forall q \in \mathcal{P}_n.$$

Dem.: $(\cdots)$

Nota. Esta condição traduz-se no sistema de equações

$$I_n(x^k) = I(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Trata-se de um sistema de equações lineares nos pesos de integração. Este método de determinar as FQIP é muitas vezes designado por *método dos coeficientes indeterminados*.

Exemplo. Determinar as FQIP de ordens 0, 1 e 2 pelas duas vias indicadas nas duas proposições, isto é, integração dos polinómios de Lagrange e método dos coeficientes indeterminados. Obtém-se:

(a) $n = 0, \ \ a \leq x_0 \leq b$

$$I_0(f) = w_0 f(x_0) = (b-a)f(x_0)$$

Caso particular: $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ (Fórmula do ponto médio)

(b) $n = 1, \ \ a \leq x_0 < x_1 \leq b$

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$w_0 = \frac{(b-a)(a+b-2x_1)}{2(x_0-x_1)}, \qquad w_1 = \frac{(b-a)(a+b-2x_0)}{2(x_1-x_0)}$$

Casos particulares:

(i) $x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad w_0 = \dfrac{b-a}{2} = w_1$

(Fórmula do trapézio ou fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 1)

(ii) $x_0 = a + \dfrac{b-a}{3}, \quad x_1 = b - \dfrac{b-a}{3}, \qquad w_0 = \dfrac{b-a}{2} = w_1$

(Fórmula de Newton-Cotes aberta de ordem 1)

(iii) $x_0 = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \qquad w_0 = \dfrac{b-a}{2} = w_1$

(Fórmula de Gauss-Legendre de ordem 1)

(c) $n = 2, \ \ a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b$

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$w_0 = \frac{(b-a)[2(a^2+b^2+ab) + 6x_1x_2 - 3(a+b)(x_1+x_2)]}{6(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$w_1 = \frac{(b-a)[2(a^2+b^2+ab) + 6x_2x_0 - 3(a+b)(x_2+x_0)]}{6(x_1-x_2)(x_1-x_0)}$$

$$w_2 = \frac{(b-a)[2(a^2+b^2+ab) + 6x_0x_1 - 3(a+b)(x_0+x_1)]}{6(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Casos particulares:

(i) $x_0 = a, \quad x_1 = \dfrac{a+b}{2}, \quad x_2 = b, \qquad w_0 = \dfrac{b-a}{6} = w_2, \quad w_1 = 4\,\dfrac{b-a}{6}$

(Fórmula de Simpson ou fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 2)

(ii) $x_0 = a + \dfrac{b-a}{4}, \quad x_1 = \dfrac{a+b}{2}, \quad x_2 = b - \dfrac{b-a}{4}$

$w_0 = 2\,\dfrac{b-a}{3} = w_2, \quad w_1 = -\dfrac{b-a}{3}$

(Fórmula de Newton-Cotes aberta de ordem 2)

(iii) $x_0 = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$w_0 = \dfrac{5}{9}\,\dfrac{b-a}{2} = w_2, \quad w_1 = \dfrac{8}{9}\,\dfrac{b-a}{2}$

(Fórmula de Gauss-Legendre de ordem 2)

Resolução: (b)

Método dos polinómios de Lagrange:

$$w_0 = \int_a^b l_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = \frac{1}{x_0-x_1}\left[\frac{(x-x_1)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b-a)(a+b-2x_1)}{2(x_0-x_1)}$$

$$w_1 = \int_a^b l_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx = \frac{1}{x_1-x_0}\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(b-a)(a+b-2x_0)}{2(x_1-x_0)}$$

Método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} I_1(1) = I(1) \\ I_1(x) = I(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 + w_1 = b-a \\ x_0w_0 + x_1w_1 = \dfrac{b^2-a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \dfrac{(b-a)(a+b-2x_1)}{2(x_0-x_1)} \\ w_1 = \dfrac{(b-a)(a+b-2x_0)}{2(x_1-x_0)} \end{cases}$$

Fórmulas de Newton-Cotes fechadas e abertas

Proposição. A FQIP de ordem $n \in \mathbb{N}_1$ com nós de integração equidistantes

$$x_{j,n} = a + jh_n, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

onde

$$h_n = \frac{b-a}{n},$$

é chamada a **fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem** n. Os seus pesos de integração são dados por

$$w_{j,n} = h_n\,\frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (t-i)\,dt,$$

e têm a simetria,

$$w_{j,n} = w_{n-j,n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Exemplo. $I_1(f)$ e $I_2(f)$ foram calculados no exemplo anterior. $I_3(f), I_4(f), I_5(f), I_6(f), I_7(f)$ estão disponíveis no Anexo.

Proposição (Teorema do Valor Médio para Integrais). Sejam $f, u \in C([a,b]),\ u(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$. Então:

$$\int_a^b u(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b u(x)\, dx,$$

para algum $\xi \in [a,b]$.

Proposição. Seja $f \in C^2([a,b])$. O erro de integração para a fórmula do trapézio é dado por

$$E_1(f) = I(f) - I_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

onde $h = b - a$ e $\xi \in]a,b[$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^4([a,b])$. O erro de integração para a fórmula de Simpson é dado por

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

onde $h = \dfrac{b-a}{2}$ e $\xi \in]a,b[$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{n+\nu_n}([a,b])$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}\,[1 + (-1)^n]$; isto é, $\nu_n = 1$ para n ímpar e $\nu_n = 2$ para n par. Então o erro de integração para a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem n é dado por

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \frac{C_n}{(n+\nu_n)!}\, h_n^{n+1+\nu_n} f^{(n+\nu_n)}(\xi),$$

onde

$$C_n = \int_0^n t^{\nu_n - 1} \prod_{i=0}^{n} (t - i)\, dt,$$

$h_n = \dfrac{b-a}{n}$ e $\xi \in]a,b[$.

Nota. Mostra-se que $C_n < 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}_1$.

Exemplo. $E_3(f), \ldots, E_7(f)$ estão disponíveis no Anexo.

Definição. Uma fórmula de integração numérica $I_n(f)$ que aproxima $I(f)$ diz-se de **grau**

de precisão m se:

(1) $I_n(q) = I(q), \quad \forall q \in \mathcal{P}_m;$

(2) $I_n(q) \neq I(q), \quad$ para algum $\; q \in \mathcal{P}_{m+1}.$

Proposição. As fórmulas de Newton-Cotes fechadas de ordem n têm grau de precisão $n + \nu_n - 1$, isto é, têm grau de precisão

(1) n, para n ímpar; (2) $n + 1$, para n par.

Proposição. A FQIP de ordem $n \in \mathbb{N}$ com nós de integração equidistantes

$$x_{j,n} = a + (j+1)h_n, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

onde

$$h_n = \frac{b-a}{n+2},$$

é chamada a **fórmula de Newton-Cotes aberta de ordem** n. Os seus pesos de integração são dados por

$$w_{j,n} = h_n \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} \int_{-1}^{n+1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (t-i)\, dt,$$

e têm a simetria,

$$w_{j,n} = w_{n-j,n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Exemplo. $I_0(f), I_1(f), I_2(f)$ foram calculadas no exemplo de FQIP.

Proposição. Seja $f \in C^2([a,b])$. O erro de integração para a fórmula do ponto médio é dado por

$$E_0(f) = I(f) - I_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi),$$

onde $h = \dfrac{b-a}{2}$ e $\xi \in]a, b[$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{n+\nu_n}([a,b])$, onde $\nu_n = 1 + \dfrac{1}{2}\,[1 + (-1)^n]$. Então o erro de integração para a fórmula de Newton-Cotes aberta de ordem n é dado por

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \frac{C_n}{(n+\nu_n)!}\, h_n^{n+1+\nu_n} f^{(n+\nu_n)}(\xi),$$

onde

$$C_n = \int_{-1}^{n+1} t^{\nu_n - 1} \prod_{i=0}^{n} (t-i)\, dt,$$

$h_n = \dfrac{b-a}{n+2}$ e $\xi \in [a, b]$.

Nota. Mostra-se que $C_n > 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. $E_1(f)$ e $E_2(f)$ estão disponíveis no Anexo.

Proposição. As fórmulas de Newton-Cotes abertas de ordem n têm grau de precisão $n + \nu_n - 1$, isto é, têm grau de precisão

(1) n, para n ímpar; (2) $n+1$, para n par.

Proposição. Seja $f \in C^{n+\nu_n}([a,b])$, onde $\nu_n = 1 + \frac{1}{2}\,[1 + (-1)^n]$. Então o erro de integração para a fórmula de Newton-Cotes, fechada ou aberta, de ordem n é dado por

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \frac{E_n(q)}{(n+\nu_n)!}\, f^{(n+\nu_n)}(\xi),$$

onde $q(x) = (x-a)^{n+\nu_n}$ e $\xi \in]a,b[$.

Exemplo. Determinar as expressões dos erros da fórmula dos trapézios e da fórmula de Simpson.

$$E_1(f) = \frac{E_1(q)}{2!}\, f''(\xi), \qquad q(x) = (x-a)^2$$

$$\begin{aligned} E_1(q) &= I(q) - I_1(q) = \int_a^b q(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\,[q(a) + q(b)] \\ &= \frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^3}{2} = -\frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}\, f''(\xi)$$

$$E_2(f) = \frac{E_2(q)}{4!}\, f^{(4)}(\xi), \qquad q(x) = (x-a)^4$$

$$\begin{aligned} E_2(q) &= I(q) - I_2(q) = \int_a^b q(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[q(a) + 4q\left(\frac{a+b}{2}\right) + q(b)\right] \\ &= \frac{(b-a)^5}{5} - \frac{5}{24}\,(b-a)^5 = -\frac{(b-a)^5}{120} \end{aligned}$$

$$E_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

Fórmulas de Newton-Cotes fechadas e abertas compostas

• Uma vez que os erros das fórmulas de Newton-Cotes são proporcionais a potências de $b-a$, se esta quantidade não for suficientemente pequena, as fórmulas deixam de ter utilidade. Neste caso o que se deve fazer é dividir o intervalo $[a,b]$ em subintervalos e aplicar a cada um dos integrais assim obtidos uma das fórmulas de Newton-Cotes.

Proposição. Seja $I_n(f;[a,b])$ a fórmula de Newton-Cotes de ordem n, fechada ou aberta, para obter um valor aproximado do integral

$$I(f;[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

anteriormente designadas simplesmente por $I_n(f)$ e $I(f)$, respectivamente. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_M$ os pontos do intervalo $[a,b]$ definidos por

$$x_j = a + jh_M, \quad j = 0,1,\ldots,M, \qquad h_M = \frac{b-a}{M},$$

onde $M \in \mathbb{N}_1$ é um múltiplo de $n+\mu$, onde $\mu = 0$ no caso das fórmulas fechadas, e $\mu = 2$, no caso das fórmulas abertas. Então a fórmula de Newton-Cotes, fechada ou aberta, de ordem n, composta, com M subintervalos, para obter um valor aproximado do integral $I(f)$, é

$$I_n^{(M)}(f) = \sum_{j=1}^{M/(n+\mu)} I_n(f;[x_{(n+\mu)(j-1)}, x_{(n+\mu)j}]).$$

Exemplo. Fórmula do trapézio composta

$$I_1^{(M)}(f) = \frac{h_M}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{M-1} f(x_j) + f(x_M)\right], \qquad h_M = \frac{b-a}{M}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned}
I_1^{(M)}(f) &= \sum_{j=1}^{M} I_1\left(f;[x_{j-1},x_j]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2}\left(x_j - x_{j-1}\right)\left[f(x_{j-1}) + f(x_j)\right] \\
&= \frac{b-a}{2M}\sum_{j=1}^{M}\left[f(x_{j-1}) + f(x_j)\right]
\end{aligned}$$

Exemplo. Fórmula de Simpson composta

$$I_2^{(M)}(f) = \frac{h_M}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{M/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{M/2} f(x_{2j-1}) + f(x_M)\right], \qquad h_M = \frac{b-a}{M}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned}
I_2^{(M)}(f) &= \sum_{j=1}^{M/2} I_2\left(f;[x_{2j-2},x_{2j}]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{M/2} \frac{1}{6}\left(x_{2j} - x_{2j-2}\right)\left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right] \\
&= \frac{b-a}{3M}\sum_{j=1}^{M/2}\left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right]
\end{aligned}$$

Exemplo. As fórmulas de Newton-Cotes fechadas compostas para $n = 3, \ldots, 7$ e as fórmulas de Newton-Cotes abertas compostas para $n = 0, 1, 2$ estão disponíveis no Anexo.

Proposição. Seja $f \in C^2([a, b])$. O erro de integração para a fórmula do trapézio composta é dado por

$$E_1^{(M)}(f) = I(f) - I_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h_M^2 f''(\xi),$$

onde $h_M = \dfrac{b-a}{M}$ e $\xi \in]a, b[$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{n+\nu_n}([a, b])$ onde $\nu_n = 1 + \dfrac{1}{2}\,[1 + (-1)^n]$. Seja $M \in \mathbb{N}_1$ um múltiplo de $n+\mu$, onde $\mu = 0$ no caso das fórmulas fechadas, e $\mu = 2$ no caso das fórmulas abertas. O erro de integração para a fórmula de Newton-Cotes de ordem n, fechada ou aberta, composta, com M subintervalos de integração, é dado por

$$E_n^{(M)}(f) = I(f) - I_n^{(M)}(f) = \frac{b-a}{n+\mu}\, \frac{C_n^\mu}{(n+\nu_n)!}\, h_M^{n+\nu_n}\, f^{(n+\nu_n)}(\xi),$$

onde $h_M = \dfrac{b-a}{M}$ e $\xi \in]a, b[$. Os coeficientes C_n^μ foram obtidos anteriormente em ambos os casos.

Exemplo. Os erros de integração para as fórmulas de Newton-Cotes fechadas compostas de ordens $2, \ldots, 7$ e abertas compostas de ordens $0, 1, 2$ estão disponíveis no Anexo.

Fórmulas de integração de Gauss

• Dados os nós de integração $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ em $[a, b]$, os pesos de integração $w_{0,n}, w_{1,n}, \ldots, w_{n,n}$ das FQIP

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}),$$

são determinados por forma a que todos os polinómios de grau $\leq n$ sejam integrados exactamente, isto é,

$$I_n(p) = I(p), \qquad \forall p \in \mathcal{P}_n.$$

Vamos agora considerar o problema de escolher os nós $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ por forma a que a FQIP integre exactamente os polinómios de maior grau $m \geq n$ possível, isto é,

$$I_n(p) = I(p), \qquad \forall p \in \mathcal{P}_m,$$

e determinar esse grau.

Os nós e os pesos de quadratura, num total de $2n + 2$ incógnitas, devem satisfazer ao sistema de equações não-lineares

$$I_n(x^k) = I(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Veremos que é efectivamente para $m = 2n+1$, valor para o qual o número de equações coincide com o número de incógnitas, que este sistema tem uma única solução e que para esta solução os pontos $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ são distintos. São os zeros do polinómio de grau $n+1$ de um sistema de polinómios ortogonais com respeito ao produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = I(fg), \qquad \forall f, g \in C([a,b]).$$

Para ganharmos alguma sensibilidade para a dificuldade do problema consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo. No caso do integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

determinar as FQIP que integram exactamente todos os polinómios de grau menor ou igual a $2n+1$, para $n = 0, 1, 2$.

O sistema de $2n+2$ equações não lineares a resolver é:

$$\sum_{j=0}^{n} w_{j,n} x_{j,n}^k = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n+1,$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^{n} w_{j,n} x_{j,n}^k = \begin{cases} 0, & k = 1, 3, \ldots, 2n+1 \\ \dfrac{2}{k+1}, & k = 0, 2, \ldots, 2n \end{cases}.$$

$$n = 0: \begin{cases} w_{0,0}x_{0,0} = 0 \\ w_{0,0} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{0,0} = 0 \\ w_{0,0} = 2 \end{cases}$$

$$I_0(f) = 2f(0)$$

$$n = 1: \begin{cases} w_{0,1}x_{0,1} + w_{1,1}x_{1,1} = 0 \\ w_{0,1}x_{0,1}^3 + w_{1,1}x_{1,1}^3 = 0 \\ w_{0,1} + w_{1,1} = 2 \\ w_{0,1}x_{0,1}^2 + w_{1,1}x_{1,1}^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{0,1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_{1,1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ w_{0,1} = 1 \\ w_{1,1} = 1 \end{cases}$$

$$I_1(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$
n=2:\begin{cases}
w_{0,2}x_{0,2}+w_{1,2}x_{1,2}+w_{2,2}x_{2,2}=0\\
w_{0,2}x_{0,2}^3+w_{1,2}x_{1,2}^3+w_{2,2}x_{2,2}^3=0\\
w_{0,2}x_{0,2}^5+w_{1,2}x_{1,2}^5+w_{2,2}x_{2,2}^5=0\\
w_{0,2}+w_{1,2}+w_{2,2}=2\\
w_{0,2}x_{0,2}^2+w_{1,2}x_{1,2}^2+w_{2,2}x_{2,2}^2=\dfrac{2}{3}\\
w_{0,2}x_{0,2}^4+w_{1,2}x_{1,2}^4+w_{2,2}x_{2,2}^4=\dfrac{2}{5}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_{0,2}=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\\
x_{1,2}=0\\
x_{2,2}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\\
w_{0,2}=\dfrac{5}{9}\\
w_{1,2}=\dfrac{8}{9}\\
w_{2,2}=\dfrac{5}{9}
\end{cases}
$$

$$I_2(f)=\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

• A solução do sistema torna-se rapidamente demasiado complicada. A solução do problema passa pois por uma outra via.

• No estudo das fórmulas de quadratura de Gauss vamos considerar com mais generalidade o integral

$$I(f)=\int_a^b w(x)f(x)\,dx,$$

onde w é uma *função de peso*, anteriormente definida.

Definição. Uma FQIP

$$I_n(f)=\sum_{j=0}^{n} w_{j,n}f(x_{j,n}),$$

com $n+1$ nós de quadratura distintos $x_{0,n},\ldots,x_{n,n}$ é chamada uma **fórmula de quadratura de Gauss** se integra exactamente todos os polinómios de grau menor ou igual a $2n+1$, isto é,

$$I_n(p)=I(p),\qquad \forall p\in\mathcal{P}_{2n+1}.$$

Proposição. Para cada $n\in\mathbb{N}$ existe uma única fórmula de quadratura de Gauss. Os seus nós de quadratura são os zeros do polinómio de grau $n+1$ pertencente ao sistema de polinómios ortogonais $\{\varphi_k\}$ com respeito ao produto interno

$$\langle f,g\rangle=I(fg),\qquad \forall f,g\in C([a,b]).$$

Os seus pesos de quadratura são determinados pelas fórmulas

$$w_{j,n}=I(l_{j,n}),\qquad j=0,1,\ldots,n,$$

onde $l_{0,n},\ldots,l_{n,n}$ são os polinómios de Lagrange de grau n suportados nos nós de integração, ou, por qualquer dos sistemas (lineares) de $n+1$ equações:

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} x_{j,n}^k = I(x^k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} \varphi_k(x_{j,n}) = I(\varphi_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Proposição. A fórmula de quadratura de Gauss de ordem n tem grau de precisão $2n+1$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Os pesos da fórmula de quadratura de Gauss de ordem n são dados por

$$w_{j,n} = I(l_{j,n}^2), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Em particular

$$w_{j,n} > 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Os pesos da fórmula de quadratura de Gauss de ordem n são dados por

$$w_{j,n} = -\frac{I(\Phi_{n+1}^2)}{\Phi_{n+1}'(x_{j,n})\Phi_{n+2}(x_{j,n})}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

onde Φ_n é o elemento de grau n do sistema de polinómios mónicos ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = I(fg), \qquad \forall f, g \in C([a,b]).$$

Proposição. Seja $f \in C^{2n+2}([a,b])$. Então o erro da fórmula de quadratura de Gauss de ordem n é dado por

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \frac{I(\Phi_{n+1}^2)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

para algum $\xi \in]a,b[$.

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo. **Fórmulas de Gauss-Legendre** $([a,b] = [-1,1], \;\; w(x) \equiv 1)$

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \;\approx\; I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

$x_{j,n},\;\; j=0,1,\ldots,n$: zeros do polinómio de Legendre $\;P_{n+1}$

$$w_{j,n} = -\frac{2}{(n+2)P'_{n+1}(x_{j,n})P_{n+2}(x_{j,n})}, \qquad j=0,1,\ldots,n$$

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}\, f^{(2n+2)}(\xi), \qquad f\in C^{2n+2}([-1,1]), \quad \xi\in]a,b[$$

Estes resultados obtêm-se combinando nas expressões gerais para $w_{j,n}$ e $E_n(f)$ com as seguintes propriedades dos polinómios de Legendre (Capítulo 7):

$$\Phi_n = \frac{P_n}{A_n}, \qquad A_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}, \qquad\qquad \langle P_n, P_n\rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

As fórmulas de Gauss-Legendre de ordens 0, 1, 2 foram obtidas anteriormente. A fórmula de ordem 3 está disponível no Anexo. Também os erros destas quatro fórmulas estão disponíveis no Anexo.

Proposição. Seja $f\in C^{2n+2}([a,b])$ uma função tal que

$$\sup_{k\geq 0} M_k < \infty, \qquad M_k := \max_{x\in[-1,1]} \frac{\left|f^{(k)}(x)\right|}{k!}.$$

Então o erro da fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de ordem n satisfaz a

$$|E_n(f)| \leq \frac{\pi}{4^{n+1}}\, M_{2n+2}, \qquad n\to\infty.$$

Nota. Este resultado mostra que $E_n(f)\to 0,\; n\to\infty$, com um decrescimento exponencial. Compare-se com o decrescimento da forma $1/M^{n+\nu_n},\;\; M\to\infty$, para as fórmulas de Newton-Cotes compostas de ordem n.

Exemplo. **Fórmulas de Gauss-Chebyshev** $\big([a,b]=[-1,1],\;\; w(x)=1/\sqrt{1-x^2}\big)$:

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\;\approx\;\; I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

$$x_{j,n} = -\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad w_{j,n} = \frac{\pi}{n+1}, \qquad j=0,1,\ldots,n$$

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!}\, f^{(2n+2)}(\xi), \qquad \xi\in]a,b[$$

Estes resultados obtêm-se combinando nas expressões gerais para $w_{j,n}$ e $E_n(f)$ com as seguintes propriedades dos polinómios de Chebyshev (Capítulo 7):

$$\Phi_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}, \qquad \langle T_n, T_n\rangle = \frac{\pi}{2}, \qquad T_n(x) = \cos(n\arccos x)$$

No caso dos pesos de integração temos:

$$w_{j,n} = -\frac{I(\Phi_{n+1}^2)}{\Phi'_{n+1}(x_{j,n})\Phi_{n+2}(x_{j,n})} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(x_{j,n})T_{n+2}(x_{j,n})}$$

$$x = \cos\theta, \qquad T_n(x) = \cos(n\theta), \qquad T'_n(x) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

$$x_{j,n} = \cos\theta_{j,n}, \qquad \theta_{j,n} = \pi - \frac{\pi(2j+1)}{2(n+1)}$$

$$w_{j,n} = -\frac{\pi\sin\theta_{j,n}}{(n+1)\sin[(n+1)\theta_{j,n}]\cos[(n+2)\theta_{j,n}]} = \frac{\pi}{n+1}$$

Exemplo. Considere o integral

$$I(f) = \int_{-b}^{b} w(x)f(x)\,dx,$$

onde $f, w \in C([-b,b])$, w é definida por $w(x) = b - |x|$ e b é uma constante positiva. Determine as fórmulas de quadratura de Gauss de ordens 1, 2 e 3 para aproximar o integral $I(f)$. Note que

$$I(x^m) = \begin{cases} \dfrac{2b^{m+2}}{(m+2)(m+1)}, & m \text{ par} \\ 0, & m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Resolução:

– Construção do conjunto de polinómios ortogonais em relação ao produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = I(fg), \qquad \forall f, g \in C([-b,b])$$

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x - B_1 = x$$

$$B_1 = \frac{\langle x\varphi_0, \varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0, \varphi_0\rangle} = \frac{I(x)}{I(1)} = 0$$

$$\varphi_2(x) = (x - B_2)\varphi_1(x) - C_2\varphi_0(x) = x^2 - \frac{b^2}{6}$$

$$B_2 = \frac{\langle x\varphi_1, \varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1, \varphi_1\rangle} = \frac{I(x^3)}{I(x^2)} = 0$$

$$C_2 = \frac{\langle x\varphi_1, \varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0, \varphi_0\rangle} = \frac{I(x^2)}{I(1)} = \frac{b^2}{6}$$

$$\varphi_3(x) = (x - B_3)\varphi_2(x) - C_3\varphi_1(x) = x\left(x^2 - \frac{2b^2}{5}\right)$$

$$B_3 = \frac{\langle x\varphi_2, \varphi_2\rangle}{\langle\varphi_2, \varphi_2\rangle} = \frac{I(x[\varphi_2(x)]^2)}{I([\varphi_2(x)]^2)} = 0$$

$$C_3 = \frac{\langle x\varphi_2, \varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1, \varphi_1\rangle} = \frac{I\left(x^4 - \frac{b^2}{6}x^2\right)}{I(x^2)} = \frac{7b^2}{30}$$

– Cálculo das fórmulas de Gauss:

$$n = 0: \quad I_0(f) = w_0 f(x_0), \qquad x_0 = 0$$

$$w_0 = I(1) = b^2$$

$$n = 1: \quad I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1), \qquad x_1 = \frac{b}{\sqrt{6}} = -x_0$$

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = I(1) = b^2 \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = I(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad w_0 = w_1 = \frac{b^2}{2}$$

$$n = 2: \quad I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2), \qquad x_2 = b\sqrt{\frac{2}{5}} = -x_0, \ \ x_1 = 0$$

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = I(1) = b^2 \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 = I(x) = 0 \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = I(x^2) = \dfrac{b^4}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = w_2 = \dfrac{5b^2}{24} \\ w_1 = \dfrac{7b^2}{12} \end{cases}$$

Fórmula de Gauss-Legendre composta

Proposição (da mudança de variável). Seja

$$I_n(f; [-1, 1]) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

uma FQIP para obter um valor aproximado do integral

$$I(f; [-1, 1]) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt.$$

Então a FQIP

$$I_n(f; [a, b]) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n}^* f(x_{j,n}^*),$$

onde

$$w_{j,n}^* = \frac{b-a}{2} w_{j,n}, \qquad x_{j,n}^* = a + \frac{b-a}{2}(x_{j,n} + 1),$$

permite obter um valor aproximado para o integral

$$I(f; [a, b]) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja

$$I_n(f; [-1, 1]) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}),$$

a fórmula de Gauss-Legendre para obter um valor aproximado do integral

$$I(f;[-1,1]) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$

Então a **fórmula de Gauss-Legendre composta** com M subintervalos para obter um valor aproximado do integral

$$I(f;[a,b]) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

é dada por

$$I_n^{(M)}(f;[a,b]) = \frac{h_M}{2}\sum_{j=0}^{n} w_{j,n} \sum_{m=1}^{M} f\left(x_{j,n}^{(m)}\right),$$

onde

$$x_{j,n}^{(m)} = a + h_M(m-1) + \frac{h_M}{2}\left(x_{j,n}+1\right), \qquad h_M = \frac{b-a}{M}.$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{2n+2}([a,b])$. O erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre composta de ordem n com M subintervalos de integração é dado por

$$E_n^{(M)}(f) = \frac{b-a}{2}\left(\frac{h_M}{2}\right)^{2n+2} E_n(f),$$

onde

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}\, f^{(2n+2)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

Convergência de fórmulas de quadratura

Definição. Diz-se que uma sucessão de fórmulas de quadratura que aproxima o integral $I(f)$ é **convergente** se

$$I_n(f) \to I(f), \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in C([a,b]).$$

Proposição. Seja

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}),$$

uma sucessão de fórmulas de quadratura que aproxima o integral $I(f)$ tal que:

(1) $I_n(p) \to I(p), \quad n \to \infty,$ para qualquer polinómio p;

(2) $w_{j,n} > 0, \quad \forall j,\ \forall n.$

Então a sucessão é convergente.

Proposição.

(1) As fórmulas de quadratura de Newton-Cotes fechadas compostas de ordens 1 a 7 são convergentes, isto é,

$$I_n^{(M)}(f) \to I(f), \quad M \to \infty, \qquad \forall f \in C([a,b]).$$

(2) As fórmulas de quadratura de Gauss de ordem n são convergentes, isto é,

$$I_n(f) \to I(f), \quad n \to \infty, \qquad \forall f \in C([a,b]).$$

Nota. As fórmulas de quadratura de Newton-Cotes de ordem n não são convergentes, isto é,

$$I_n(f) \not\to I(f), \quad n \to \infty, \qquad f \in C([a,b]).$$

<u>Anexo</u>

- Fórmulas de Newton-Cotes fechadas de ordem n:

  ∘• $n = 1,\ h = b - a$ (Regra dos trapézios):

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)], \qquad E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[$$

  ∘• $n = 2,\ h = \dfrac{b-a}{2}$ (Regra de Simpson):

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \qquad E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

  ∘• $n = 3,\ h = \dfrac{b-a}{3}$ (Regra dos três oitavos):

$$I_3(f) = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)\right], \quad E_3(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

  ∘• $n = 4,\ h = \dfrac{b-a}{4}$ (Regra de Milne):

$$I_4(f) = \frac{b-a}{90}\left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f(b-h) + 7f(b)\right]$$

$$E_4(f) = -\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

  ∘• $n = 5,\ h = \dfrac{b-a}{5}$:

$$I_5(f) = \frac{b-a}{288}\left[19f(a) + 75f(a+h) + 50f(a+2h) + 50f(b-2h) + 75f(b-h) + 19f(b)\right]$$

$$E_5(f) = -\frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

  ∘• $n = 6,\ h = \dfrac{b-a}{6}$ (Regra de Weddle):

$$I_6(f) = \frac{b-a}{840}\Bigg[41f(a) + 216f(a+h) + 27f(a+2h) + 272f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$+27f(b-2h) + 216f(b-h) + 41f(b)\Bigg]$$

$$E_6(f) = -\frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

  ∘• $n = 7,\ h = \dfrac{b-a}{7}$:

$$I_7(f) = \frac{b-a}{120960}\Bigg[5257f(a) + 25039f(a+h) + 9261f(a+2h) + 20923f(a+3h)$$
$$+20923f(b-3h) + 9261f(b-2h) + 25039f(b-h) + 5257f(b)\Bigg]$$

$$E_7(f) = -\frac{8183h^9}{518400} f^{(8)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

- Fórmulas de Newton-Cotes abertas de ordem n:

○• $n=0,\ h=\dfrac{b-a}{2}$ (Regra do ponto médio):

$$I_0(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad E_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad \xi \in]a,b[$$

○• $n=1,\ h=\dfrac{b-a}{3}$:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\, [f(a+h)+f(b-h)], \qquad E_1(f) = \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \quad \xi \in]a,b[$$

○• $n=2,\ h=\dfrac{b-a}{4}$:

$$I_2(f) = \frac{b-a}{3} \left[2f(a+h) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f(b-h)\right]$$

$$E_2(f) = \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a,b[$$

- Fórmulas de Newton-Cotes fechadas compostas:

○• $n=1$:

$$I_1^{(M)}(f) = \frac{h_M}{2} \left[f_0 + f_M + 2\sum_{j=1}^{M-1} f_j\right]$$

$$E_1^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{12}\, h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n=2$ (M par):

$$I_2^{(M)}(f) = \frac{h_M}{3} \left[f_0 + f_M + 4\sum_{j=1}^{M/2} f_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{M/2-1} f_{2j}\right]$$

$$E_2^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{180}\, h_M^4 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n=3$ (M múltiplo de 3):

$$I_3^{(M)}(f) = \frac{3h_M}{8} \left[f_0 + f_M + 2\sum_{j=1}^{M/3-1} f_{3j} + 3\sum_{j=1}^{M/3} (f_{3j-1} + f_{3j-2})\right]$$

$$E_3^{(M)}(f) = -\frac{b-a}{80}\, h_M^4 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n = 4$ (M múltiplo de 4):

$$I_4^{(M)}(f) = \frac{4h_M}{90}\left[7\,(f_0 + f_M) + 14\sum_{j=1}^{M/4-1} f_{4j} + 32\sum_{j=1}^{M/4}(f_{4j-1} + f_{4j-3}) + 12\sum_{j=1}^{M/4} f_{4j-2}\right]$$

$$E_4^{(M)}(f) = -\frac{2(b-a)}{945}\,h_M^6 f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n = 5$ (M múltiplo de 5):

$$I_5^{(M)}(f) = \frac{5h_M}{288}\left[19\,(f_0 + f_M) + 38\sum_{j=1}^{M/5-1} f_{5j} + 75\sum_{j=1}^{M/5}(f_{5j-1} + f_{5j-4}) + 50\sum_{j=1}^{M/5}(f_{5j-2} + f_{5j-3})\right]$$

$$E_5^{(M)}(f) = -\frac{55(b-a)}{12096}\,h_M^6 f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n = 6$ (M múltiplo de 6):

$$I_6^{(M)}(f) = \frac{h_M}{140}\left[41\,(f_0 + f_M) + 82\sum_{j=1}^{M/6-1} f_{6j} + 216\sum_{j=1}^{M/6}(f_{6j-1} + f_{6j-5}) + 27\sum_{j=1}^{M/6}(f_{6j-2} + f_{6j-4}) + 272\sum_{j=1}^{M/6} f_{6j-3}\right]$$

$$E_6^{(M)}(f) = -\frac{3(b-a)}{2800}\,h_M^8 f^{(8)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

○• $n = 7$ (M múltiplo de 7):

$$I_7^{(M)}(f) = \frac{h_M}{17280}\left[5257\,(f_0 + f_M) + 10514\sum_{j=1}^{M/7-1} f_{7j} + 25039\sum_{j=1}^{M/7}(f_{7j-1} + f_{7j-6}) + 9261\sum_{j=1}^{M/7}(f_{7j-2} + f_{7j-5}) + 20923\sum_{j=1}^{M/7}(f_{7j-3} + f_{7j-4})\right]$$

$$E_7^{(M)}(f) = -\frac{1169(b-a)}{518400}\,h_M^8 f^{(8)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[$$

• Fórmulas de Newton-Cotes abertas compostas:

○• $n = 0$ (M par):

$$I_0^{(M)}(f) = 2h_M\sum_{j=1}^{M/2} f_{2j-1}, \qquad E_0^{(M)}(f) = \frac{(b-a)h_M^2}{6} f''(\xi), \quad \xi \in]a,b[$$

○• $n = 1$ (M múltiplo de 3):

$$I_1^{(M)}(f) = \frac{3h_M}{2} \sum_{j=1}^{M/3} (f_{3j-2} + f_{3j-1})$$

$$E_1^{(M)}(f) = \frac{b-a}{4}\, h_M^2 f''(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

○• $n = 2$ (M múltiplo de 4):

$$I_2^{(M)}(f) = \frac{4h_M}{3} \sum_{j=1}^{M/4} (2f_{4j-3} - f_{4j-2} + 2f_{4j-1})$$

$$E_2^{(M)}(f) = \frac{7(b-a)}{90}\, h_M^4 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

• Fórmulas de Gauss-Legendre:

○• $n = 0$

$$I_0(f) = 2f(0), \qquad E_0(f) = \frac{1}{3}\, f''(\xi), \quad \xi \in]a, b[$$

○• $n = 1$

$$I_1(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \qquad E_1(f) = \frac{1}{135}\, f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in]a, b[$$

○• $n = 2$

$$I_2(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\, f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$E_2(f) = \frac{1}{15750}\, f^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$

○• $n = 3$

$$I_3(f) = w_{0,3} f(x_{0,3}) + w_{1,3} f(x_{1,3}) + w_{2,3} f(x_{2,3}) + w_{3,3} f(x_{3,3})$$

$$x_{0,3} = -\sqrt{\frac{1}{7}\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)} = -x_{3,3}, \quad x_{1,3} = -\sqrt{\frac{1}{7}\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)} = -x_{2,3}$$

$$w_{0,3} = \frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{\frac{5}{6}}\right) = w_{3,3}, \quad w_{1,3} = \frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{\frac{5}{6}}\right) = w_{2,3}$$

$$E_3(f) = \frac{1}{3472875}\, f^{(8)}(\xi), \qquad \xi \in]a, b[$$