MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 7. Aproximação Mínimos Quadrados

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do $2^{\underline{o}}$ ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

7. APROXIMAÇÃO MÍNIMOS QUADRADOS

Introdução

• É muitas vezes de interesse o problema de aproximar uma função "complicada" por uma função "simples". No capítulo anterior considerámos o caso em que as funções aproximadoras são os polinómios interpoladores.

Neste capítulo consideraremos outros tipos de funções aproximadoras para f, sem a exigência que elas interpolem f. Com efeito, em muitas situações não é conveniente que a função aproximadora seja uma função interpoladora. Por exemplo, suponhamos que a função f traduz uma relação entre duas grandezas físicas, x e $f(x)$. Suponhamos ainda que os valores $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, foram obtidos experimentalmente; ou seja, apenas dispomos de valores $f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, onde os erros ε_i são desconhecidos. Neste caso, não seria razoável aproximar f por um polinómio passando por $(x_i, f(x_i) + \varepsilon_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, a não ser que os erros ε_i fossem pequenos. Uma solução mais adequada seria utilizar um polinómio obtido pelo chamado **método dos mínimos quadrados**, onde se reduz o efeito dos erros dos dados.

• Para se avaliar a qualidade de uma aproximação precisamos de introduzir uma noção de distância entre a função e a função aproximadora.

Definição. Seja E um conjunto não vazio. Uma função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que verifica as condições

(M1) $d(f, g) \geq 0$ e $d(f, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = g, \;\; \forall f, g \in E$;

(M2) $d(f, g) = d(g, f), \;\; \forall f, g \in E$;

(M3) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g), \;\; \forall f, g, h \in E$;

diz-se uma **métrica** ou **distância**. O conjunto E onde está definida a métrica diz-se um **espaço métrico**.

Problema geral da aproximação. Seja E um espaço métrico e $F \subset E$ um subespaço de E. Dado um elemento $f \in E$ pretende saber-se se existe um elemento $\phi^* \in F$ tal que

$$d(f, \phi^*) = \inf_{\phi \in F} d(f, \phi).$$

Se existir então ϕ^* é chamada uma **melhor aproximação (m.a.)** de f em F relativamente à métrica ou distância d. Se existir interessa saber se é único, quais as suas propriedades e como pode ser construído.

• Dado $f \in E$, o problema de determinar a m.a. ϕ^* de f em $F \subset E$ é em geral difícil. Vamos apenas considerar o importante caso em que E é um espaço pré-Hilbertiano, isto é, um espaço vectorial munido de um produto interno. Veremos que a determinação da m.a. relativamente à distância induzida pela norma induzida pelo produto interno pode ser reduzida à resolução de um sistema de equações lineares.

Melhor aproximação em espaços pré-Hilbertianos

Definição. Seja E um espaço vectorial. Uma função $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que verifica as condições

(P1) $\langle f, f\rangle \geq 0$ e $\langle f, f\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0, \ \ \forall f \in E$;

(P2) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle, \ \ \forall f, g \in E$;

(P3) $\langle f, \alpha g + \beta h\rangle = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle f, h\rangle, \ \ \forall f, g, h \in E, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

diz-se um **produto interno**. O espaço E onde está definido um produto interno diz-se um **espaço pré-Hilbertiano (p-H)**.

• Um produto interno induz a norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle},$$

passando E a ser um espaço normado. Uma norma induz uma distância

$$d(f, g) = \|f - g\|,$$

passando E a ser um espaço métrico.

Exemplo. $E = \mathbb{R}^d$ dotado do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{d} w_i f_i g_i, \qquad \forall f, g \in E,$$

onde $f = (f_1, f_2, \ldots f_d), g = (g_1, g_2, \ldots g_d)$ e $w_1, w_2, \ldots, w_d$ são constantes positivas, é um espaço p-H.

Exemplo. $E = C([a, b])$ dotado do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx, \qquad \forall f, g \in C([a, b]), \tag{\#}$$

onde w é uma função de peso, é um espaço p-H.

Definição. Uma função $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma **função de peso** se verificar as seguintes condições:

(i) $w(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$;

(ii) $\{x \in [a, b] : w(x) = 0\}$ é finito;

(iii) $\displaystyle\int_a^b x^n w(x) dx$ existe e é finito para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplos.

(i) $w(x) = 1, \quad x \in [a, b]$;

(ii) $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[$;

(iii) $w(x) = e^{-x}, \quad x \in [0,\infty[$;

(iv) $w(x) = e^{-x^2}, \quad x \in]-\infty,+\infty[$.

Problema I. Sejam $E = C([a,b])$ e F um subespaço de E de dimensão finita. Dada $f \in E$ determinar $\phi^* \in F$ que minimiza o integral

$$\int_a^b w(x)[f(x)-\phi(x)]^2\,dx.$$

Chama-se a ϕ^* a **melhor aproximação mínimos quadrados (m.a.m.q.)** de f em F.

Nota. Em termos do produto interno (#) em $C([a,b])$ o problema toma a forma: dada $f \in E$ determinar $\phi^* \in F$ tal que

$$\|f-\phi^*\| = \min_{\phi\in F}\|f-\phi\|.$$

Problema II. Sejam $E = C([a,b])$, F um subespaço de E de dimensão finita $n+1$ e $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ um conjunto de $N+1$ pontos distintos de $[a,b]$, verificando-se que $N \geq n$. Dada $f \in E$ determinar $\phi^* \in F$ que minimiza a soma

$$\sum_{i=0}^{N} w_i[f(x_i)-\phi(x_i)]^2.$$

Chama-se a ϕ^* a **melhor aproximação mínimos quadrados discreta (m.a.m.q.d.)** de f em F.

Nota. Em termos do produto interno em $\mathbb{R}^d$ acima definido o problema toma a seguinte forma. Começa-se por associar a cada $f \in E$ um vector $\bar{f} \in \mathbb{R}^{N+1}$ tal que $\bar{f}_i = f(x_i), i \in \{0,1,\ldots,N\}$. Seja ainda $\bar{F} = \{\bar{\phi} \in \mathbb{R}^{N+1} : \phi \in F\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Dada $f \in E$ determinar $\bar{\phi}^* \in \bar{F}$ tal que

$$\|\bar{f}-\bar{\phi}^*\| = \min_{\bar{\phi}\in\bar{F}}\|\bar{f}-\bar{\phi}\|.$$

Proposição (Caracterização da m.a. num espaço p-H). Sejam E um espaço p-H e F um subespaço de E. Dado $f \in E$, o elemento $\phi^* \in F$ é uma m.a. de f em F se e só se

$$\langle f-\phi^*, \phi\rangle = 0, \qquad \forall\phi \in F.$$

A m.a. de f em F é única.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (Sistema normal). Sejam E um espaço p-H, F um subespaço de E de dimensão finita $n+1$ e $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ uma base de F. Então a m.a. ϕ^* de $f \in E$ em F é dada por

$$\phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^*\varphi_k,$$

onde $a_0^*, \ldots, a_n^*$ é a solução única do **sistema normal**

$$\sum_{k=0}^{n} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle a_k^* = \langle f, \varphi_j \rangle, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Exemplo. Determinar a m.a.m.q. de $f \in E = C([0,1])$ no subespaço F gerado pela base $\{\varphi_0, \ldots \varphi_n\}$, $\varphi_j(x) = x^j$, no caso em que $w(x) = 1, \forall x \in [0,1]$. Note-se que a matriz do sistema normal é a matriz de Hilbert de ordem $n+1$.

Resolução:

$$\phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k, \qquad \varphi_k(x) = x^k$$

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_0^1 x^{j+k} dx = \frac{1}{j+k+1} = (H_{n+1})_{jk}$$

$$\langle f, \varphi_j \rangle = \int_0^1 x^j f(x) dx$$

Exemplo. Determinar a m.a.m.q.d. de $f \in E = C([a,b])$ no subespaço F gerado pela base $\{\varphi_0, \ldots \varphi_n\}$, no caso em que $w_i = 1$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Particularizar para o caso em que $\varphi_j(x) = x^j$.

Resolução:

$$\phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k, \qquad \bar{\phi}^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \bar{\varphi}_k$$

$$\begin{bmatrix} \langle \bar\varphi_0, \bar\varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \bar\varphi_0, \bar\varphi_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar\varphi_n, \bar\varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \bar\varphi_n, \bar\varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar f, \bar\varphi_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar f, \bar\varphi_n \rangle \end{bmatrix}.$$

$$\bar\varphi_j = [\varphi_j(x_0) \;\; \varphi_j(x_1) \ldots \varphi_j(x_N)]^T, \qquad \bar f = [f(x_0) \;\; f(x_1) \ldots f(x_N)]^T$$

$$\langle \bar\varphi_j, \bar\varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^{N} \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \qquad \langle \bar f, \bar\varphi_j \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \varphi_j(x_i)$$

Caso particular: $\varphi_j(x) = x^j$

$$\langle \bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_k \rangle = \sum_{i=0}^{N} x_i^{j+k}, \qquad \langle \bar{f}, \bar{\varphi}_j \rangle = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) x_i^j$$

Note-se que $\langle \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0 \rangle = N + 1$

Sistemas ortogonais.

Definição. Um conjunto S de elementos de um espaço p-H E diz-se **ortogonal** se

$$\langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u, v \in S, \quad u \neq v,$$

(e usa-se a notação $u \perp v$). Se, além disso,

$$\langle u, u \rangle = 1, \quad \forall u \in S,$$

o sistema diz-se **ortonormado**.

Proposição (Teorema de Pitágoras). Sendo $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto ortogonal então

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|u_i\|^2.$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Um conjunto finito ortogonal de elementos não nulos é um conjunto de elementos linearmente independentes.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (Ortogonalização de Gram-Schmidt). Seja $\{e_0, \ldots, e_n\}$ uma base de um subespaço F de um espaço p-H E. Seja $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ o conjunto de elementos definidos por

$$\varphi_0 = e_0, \qquad \varphi_j = e_j - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle e_j, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k, \quad j \geq 1,$$

e seja $\{\hat{\varphi}_0, \ldots, \hat{\varphi}_n\}$ o conjunto de elementos definidos por

$$\hat{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}.$$

Então o conjunto $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ constitui uma base ortogonal para F enquanto que o conjunto $\{\hat{\varphi}_0, \ldots, \hat{\varphi}_n\}$ constitui uma base ortonormada para F.

Exemplo. Determinar o sistema de polinómios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno definido por $(\#)$ com $w(x) = 1, \ \forall x \in [-1, 1]$.

Resolução:

$$e_j(x) = x^j, \quad j \geq 0$$

$$\varphi_0 = e_0, \qquad \varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}\, \varphi_0$$

$$\langle e_1, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$\varphi_1 = e_1, \qquad \varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}\, \varphi_0 - \frac{\langle e_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}\, \varphi_1$$

$$\langle e_2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}, \qquad \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\langle e_2, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

$$\varphi_2 = e_2 - \frac{1}{3}\, \varphi_0, \qquad \varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}\, \varphi_0 - \frac{\langle e_3, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}\, \varphi_1 - \frac{\langle e_3, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}\, \varphi_2$$

$$\langle e_3, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

$$\langle e_3, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{2}{5}, \qquad \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle e_3, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = 0$$

$$\varphi_3 = e_3 - \frac{3}{5}\, \varphi_1, \qquad \varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}\, x$$

Proposição (M.a. num espaço p-H usando uma base ortogonal (ortonormada)). Sendo E um espaço p-H, F um subespaço de E de dimensão finita e $\{\varphi_O, \ldots, \varphi_n\}$ uma base ortogonal de F, então a m.a. ϕ^* de $f \in E$ em F é dada por

$$\phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k, \qquad a_k^* = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle}.$$

Se a base for ortonormada ter-se-á simplesmente

$$\phi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k, \qquad a_k^* = \langle f, \varphi_k \rangle.$$

Dem.: $(\cdots)$

Polinómios ortogonais.

• Consideremos o espaço $C([a,b])$ com o produto interno definido por (#). O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aplicado ao conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ permite obter diferentes bases ortogonais para $\mathcal{P}_n$, o conjunto de polinómios de grau menor ou igual a n, correspondentes a diferentes funções de peso w. Uma maneira alternativa de construir polinómios ortogonais é usar o teorema seguinte.

Proposição (Relação de recorrência tripla). O conjunto de polinómios $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$, definidos por

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x - B_1,$$

$$\varphi_k(x) = (x - B_k)\varphi_{k-1}(x) - C_k\varphi_{k-2}(x), \qquad k \geq 2,$$

com

$$B_k = \frac{\langle x\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1}\rangle}{\langle \varphi_{k-1}, \varphi_{k-1}\rangle}, \qquad k \geq 1, \qquad\qquad C_k = \frac{\langle x\varphi_{k-1}, \varphi_{k-2}\rangle}{\langle \varphi_{k-2}, \varphi_{k-2}\rangle}, \qquad k \geq 2,$$

é ortogonal em relação ao produto interno definido por (#), isto é,

$$\langle \varphi_j, \varphi_k\rangle = \int_a^b w(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\, dx = 0, \qquad j \neq k.$$

Nota. Esta via produz polinómios ortogonais **mónicos**, isto é, com coeficente unitário da potência mais elevada.

Exemplo. Determinar o sistema de polinómios ortogonais no intervalo $[-1,1]$ em relação ao produto interno definido por (#) com $w(x) = 1,\ \forall x \in [-1,1]$.

Resolução:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$B_1 = \frac{\langle x\varphi_0, \varphi_0\rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x\, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

$$\varphi_1(x) = x$$

$$B_2 = \frac{\langle x\varphi_1, \varphi_1\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3\, dx}{\int_{-1}^1 x^2\, dx} = 0$$

$$C_2 = \frac{\langle x\varphi_1, \varphi_0\rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2\, dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$B_3 = \frac{\langle x\varphi_2, \varphi_2\rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^5\, dx}{\int_{-1}^1 x^4\, dx} = 0$$

$$C_3 = \frac{\langle x\varphi_2, \varphi_1\rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \frac{\frac{8}{45}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{15}$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}\,x$$

Proposição. Seja $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ um sistema de polinómios ortogonais em relação ao produto n, interno definido por (#). Admite-se implicitamente que $\text{grau}(\varphi_j) = j$. Se p é um polinómio de grau $m < n$ então:

$$(1)\;\; \langle p, \varphi_j\rangle = 0, \quad j = m+1, \ldots, n; \qquad (2)\;\; p = \sum_{j=0}^{m} \frac{\langle p, \varphi_j\rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j\rangle}\,\varphi_j.$$

Proposição. Seja $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ um sistema de polinómios ortogonais em relação ao produto interno definido por (#). Admite-se implicitamente que $\text{grau}(\varphi_j) = j$. Então o polinómio φ_j tem exactamente j raízes reais distintas no intervalo aberto $]a, b[$.

Exemplo. Polinómios de Legendre, P_n $\;(x \in [a,b] = [-1,1],\;\; w(x) = 1)$:

$$\begin{cases} P_n(x) = \dfrac{2n-1}{n}\,xP_{n-1}(x) - \dfrac{n-1}{n}\,P_{n-2}(x), & n \geq 2 \\ P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x & \end{cases}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$\text{grau}(P_n) = n, \qquad P_n(1) = 1, \qquad n \geq 0$$

$$A_n = \lim_{x\to\infty} x^{-n} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \qquad n \geq 1$$

$$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Exemplo. Polinómios de Chebyshev, T_n $\;\left(x \in [a,b] = [-1,1],\;\; w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$:

$$\begin{cases} T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), & n \geq 2 \\ T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x & \end{cases}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\text{grau}(T_n) = n, \qquad T_n(1) = 1, \qquad n \geq 0$$

$$A_n = \lim_{x\to\infty} x^{-n} T_n(x) = 2^{n-1}, \qquad n \geq 1$$

$$\langle T_m, T_n \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n > 0 \end{cases}$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n \geq 0$$

$$T_n(x_i) = 0, \qquad x_i = -\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}, \qquad i = 0, \ldots, n-1, \qquad n \geq 1$$

Exemplo. Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a m.a.m.q. da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a) $\langle g, h \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)h(x)\, dx, \qquad \forall g, h \in C([a, b]).$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b) $\langle g, h \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad \forall g, h \in C([a, b]).$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

Resolução:

(a)

$$P_0(x) = 1 \qquad\qquad 1 = P_0(x)$$

$$P_1(x) = x \qquad\qquad x = P_1(x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad\qquad x^2 = \frac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)]$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \qquad\qquad x^3 = \frac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)]$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad\qquad x^4 = \frac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)]$$

$$f(x) = \frac{1}{35}\,[7P_0(x) + 21P_1(x) + 20P_2(x) + 14P_3(x) + 8P_4(x)]$$

$$p_2^* = a_0^* P_0 + a_1^* P_1 + a_2^* P_2, \qquad a_k^* = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}$$

$$a_0^* = \frac{7}{35}, \qquad a_1^* = \frac{21}{35}, \qquad a_2^* = \frac{20}{35}$$

$$p_2^*(x) = \frac{3}{35}(-1 + 7x + 10x^2)$$

(b)

$$T_0(x) = 1 \qquad 1 = T_0(x)$$

$$T_1(x) = x \qquad x = T_1(x)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad x^2 = \frac{1}{2}[T_0(x) + T_2(x)]$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad x^3 = \frac{1}{4}[3T_1(x) + T_3(x)]$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \qquad x^4 = \frac{1}{8}[3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)]$$

$$f(x) = \frac{1}{8}\ [3T_0(x) + 6T_1(x) + 4T_2(x) + 2T_3(x) + T_4(x)]$$

$$p_2^* = a_0^* T_0 + a_1^* T_1 + a_2^* T_2, \qquad a_k^* = \frac{\langle f, T_k \rangle}{\langle T_k, T_k \rangle}$$

$$a_0^* = \frac{3}{8}, \qquad a_1^* = \frac{3}{4}, \qquad a_2^* = \frac{1}{2}$$

$$p_2^*(x) = \frac{1}{8}\,(-1 + 6x + 8x^2)$$