MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 6. Interpolação Polinomial

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

6. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Introdução

Exemplo. Dada uma tabela de valores $\{(t_j, P_j), j = 0, 1, \ldots, n\}$, determinar um valor (aproximado) P_a correspondente a um valor $t_a \in]t_0, t_n[$.

Sendo k tal que $t_k < t_a < t_{k+1}$ façamos

$$x_0 = t_k, \qquad x_1 = t_{k+1}, \qquad x_2 = t_{k+2}$$
$$f_0 = P_k, \qquad f_1 = P_{k+1}, \qquad f_2 = P_{k+2}$$

Interpolação linear: $P_a \approx p_1(t_a)$, onde

$$p_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Interpolação quadrática: $P_a \approx p_2(t_a)$, onde

$$p_2(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1)$$

Problema. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos,

$$f_j := f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Pretende-se determinar uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pertencente a uma dada classe de funções tal que

$$g(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Os pontos x_j são chamados *pontos* ou *nós de interpolação* e os valores f_j os *valores interpolados*. A função g é chamada a *função interpoladora*. Vamos considerar funções interpoladoras polinomiais.

- Interessa saber se este problema tem solução, se a solução é única e como se calcula.

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. Existe um único polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ou seja, tal que

$$p_n(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Dem.: $(\cdots)$

Notas.

(a) É importante distinguir entre a função p_n e as várias *representações* de p_n. Pelo teorema anterior sabemos que p_n é única para cada conjunto de $n+1$ pares ordenados (x_j, f_j), $j = 0, 1, \ldots, n$. Contudo poderá haver diversas maneiras de representar explicitamente p_n. A demonstração apresentada determina os coeficientes do polinómio por um sistema linear com matriz de Vandermonde. Já de seguida introduziremos a fórmula interpoladora de Lagrange. Mais adiante introduziremos a fórmula interpoladora de Newton. Cada uma dessas representações sugere um algoritmo para o cálculo de p_n.

(b) O facto do grau do polinómio interpolador poder ser menor ou igual a n tem a ver com a possibilidade dos valores $f_0, \ldots, f_n$, coincidirem com os valores de um polinómio q_m de grau $m \le n$ nos nós de interpolação, isto é, $f_j = q_m(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

(c) Há um número infinito de polinómios de grau $m > n$ que interpolam f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$:

$$q_m(x) = p_n(x) + c \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{\mu_i},$$

onde

$$\mu_i \in \mathbb{N}_1, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad m = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

Fórmula interpoladora de Lagrange

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. O polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é dado pela fórmula seguinte, conhecida por **fórmula interpoladora de Lagrange**:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_{j,n}(x), \qquad l_{j,n}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

$l_{0,n}, l_{1,n}, \ldots, l_{n,n}$ são os *polinómios de Lagrange* de grau n associados aos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo.

$$n = 1: \quad l_{0,1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_{1,1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \;;$$

$$n = 2: \quad l_{0,2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \qquad l_{1,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_{2,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Fórmula interpoladora de Newton

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a,b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. O polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é dado pela fórmula seguinte, conhecida por **fórmula interpoladora de Newton**:

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_j]\, W_j(x),$$

onde

$$W_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, \ldots, x_j] = \sum_{l=0}^{j} \frac{f(x_l)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{j} (x_l - x_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Os coeficientes $f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, são conhecidos por **diferenças divididas de ordem j da função f associadas aos pontos** $x_0, x_1, \ldots, x_j$.

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0]}{x_0 - x_1} + \frac{f[x_1]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Proposição. Sendo $(i_0, i_1, \ldots, i_j)$ uma permutação de $(0, 1, \ldots, j)$ então

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}].$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_j] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_0}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Dem.: $(\cdots)$

• Estas fórmulas permitem calcular as diferenças divididas usando um esquema recursivo que é em geral apresentado sob a forma de uma tabela. Na 1ª coluna escrevem-se os pontos $x_0, x_1, \ldots$, e na $2^{\underline{a}}$ coluna os valores $f[x_0], f[x_1], \ldots$ Na $3^{\underline{a}}$ coluna escrevem-se as diferenças divididas de $1^{\underline{a}}$ ordem, obtidas por aplicação das fórmulas anteriores; e assim sucessivamente.

Tabela de diferenças divididas:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\cdots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nota.

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
p_2(x) &= f[x_1] + f[x_0, x_1](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_0) \\
p_2(x) &= f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_2) \\
p_2(x) &= f[x_2] + f[x_1, x_2](x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_2)(x - x_1) \\
p_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_2](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_2) \\
p_2(x) &= f[x_2] + f[x_0, x_2](x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_2)(x - x_0)
\end{aligned}
$$

Exemplo. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	0	2	8	9

Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela usando:

(a) O método da matriz de Vandermonde.

(b) A fórmula interpoladora de Lagrange.

(c) A fórmula interpoladora de Newton.

Resolução:

(a) Método da matriz de Vandermonde

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p_3(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = -\frac{1}{4}, \qquad a_2 = \frac{4}{3}, \qquad a_1 = \frac{11}{12}, \qquad a_0 = 0$$

$$p_3(x) = \frac{11}{12}\,x + \frac{4}{3}\,x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x}{12}\,(-3x^2 + 16x + 11)$$

(b) Fórmula interpoladora de Lagrange:

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j) l_j(x), \qquad l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$p_3(x) = 2l_1(x) + 8l_2(x) + 9l_3(x)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}\,x(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{6}\,x(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{12}\,x(x-1)(x-3)$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{1}{3}x(x-3)(x-4) - \frac{4}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{3}{4}x(x-1)(x-3)] \\ &= \frac{x}{12}\,(-3x^2 + 16x + 11) \end{aligned}$$

(c) Fórmula interpoladora de Newton às diferenças divididas:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	0	0			
			2		
1	1	2		$\frac{1}{3}$	
			3		$-\frac{1}{4}$
2	3	8		$-\frac{2}{3}$	
			1		
3	4	9		1	

$$p_3(x) = 2x + \frac{1}{3}x(x-1) - \frac{1}{4}x(x-1)(x-3) = \frac{x}{12}\left(-3x^2 + 16x + 11\right)$$

Erro de interpolação polinomial

Proposição. Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. Se $f \in C^{n+1}([a,b])$ então para cada $x \in [a,b]$ existe um ponto $\xi(x) \in]x_0; x_1; \ldots; x_n; x[$ tal que

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x),$$

onde

$$W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. Se $f \in C^{n+1}([a,b])$ então

$$e_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] W_{n+1}(x).$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{n+1}([a,b])$ e sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos de $[a,b]$. Então:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in]x_0; x_1; \ldots; x_n[.$$

Dem.: $(\cdots)$

- A equação que obtivemos para o erro de interpolação de Lagrange não pode ser usada para calcular o valor exacto do erro $e_n(x)$ visto que $\xi(x)$ é em geral uma função desconhecida. Uma excepção é o caso em que $f^{(n+1)}$ é uma constante. Pode no entanto ser usada para obter um majorante do erro.

Proposição. Sendo $f \in C^{n+1}([a,b])$ então:

(1)
$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|W_{n+1}(x)|, \qquad x \in [a,b],$$
onde
$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

(2)
$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\max_{\tilde{x}\in[a,b]} |W_{n+1}(\tilde{x})|, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dem.: $(\cdots)$

• Estas fórmulas pôem em evidência a importância da contribuição da função $|W_{n+1}|$ para o erro de interpolação. Vamos estudar em mais algum pormenor esta função distinguindo dois casos: nós igualmente espaçados e nós de Chebyshev.

Proposição. Suponhamos que os nós de interpolação estão igualmente espaçados entre si:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

onde $h > 0$ é tal que $x_n \leq b$. Sendo $f \in C^{n+1}([a,b])$ a fórmula de majoração do erro de interpolação escreve-se

$$|e_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\Psi_{n+1}(t)|, \qquad \forall x \in [a,b],$$

onde $x = x_0 + th$, e
$$\Psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-i).$$

Dem.: $(\cdots)$

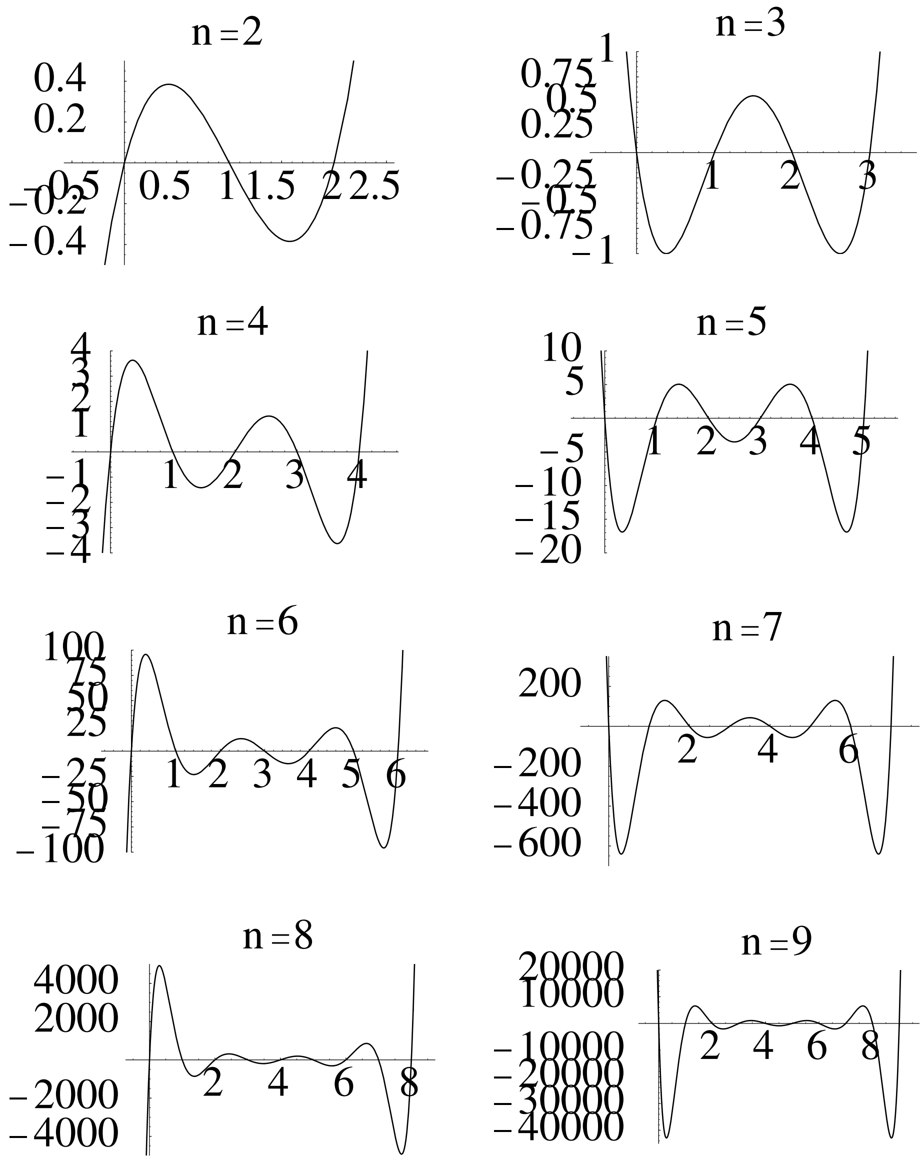
Proposição. A função Ψ_{n+1} tem as seguintes propriedades (ilustradas na figura seguinte):

(1) Ψ_{n+1} é um polinómio mónico de grau $n+1$ com zeros nos pontos $0, 1, \ldots, n$.

(2) Ψ_{n+1} é uma função simétrica ou antisimétrica em relação ao ponto médio dos zeros, $t = \frac{n}{2}$, consoante $n+1$ é par ou ímpar, respectivamente, isto é,
$$\Psi_{n+1}\left(\frac{n}{2} - t\right) = (-1)^{n+1}\Psi_{n+1}\left(\frac{n}{2} + t\right).$$

(3) Em cada intervalo $]i, i+1[,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$, $|\Psi_{n+1}|$ possui um único máximo.

(4) Os valores dos máximos relativos de $|\Psi_{n+1}|$ crescem à medida que t se afasta de $\frac{n}{2}$.



(5) $|\Psi_{n+1}|$ tem um máximo absoluto no intervalo $[0, n]$, o qual ocorre em dois pontos, um no subintervalo $]0, 1[$ e outro no subintervalo $]n-1, n[$, verificando-se a desigualdade

$$\max_{t\in[0,n]} |\Psi_{n+1}(t)| < n!.$$

(6) Este valor máximo absoluto e o seu quociente em relação aos valores dos restantes máximos relativos crescem com n.

(7) $|\Psi_{n+1}(t)|$ cresce rapidamente para $t < 0$ e $t > n$.

Notas. Atendendo à fórmula de majoração do erro e ao que se disse sobre a função Ψ_{n+1} conclui-se que:

(a) na interpolação de f por p_n os nós de interpolação igualmente espaçados $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$, devem ser escolhidos por forma a que x esteja perto do centro do intervalo $[x_0, x_0 + nh]$, isto é, $x \approx x_0 + \frac{nh}{2}$.

(b) o erro de interpolação cresce muito rapidamente quando x se afasta de x_0, para a esquerda, e de $x_0 + nh$, para a direita, o que desencoraja a *extrapolação*, isto é, a aproximação de $f(x)$ por $p_n(x)$ para valores de x fora do intervalo $[x_0, x_0 + nh]$.

Proposição. De entre todas as escolhas de nós de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos no intervalo $[-1, 1]$, a quantidade

$$\max_{x \in [-1,1]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|,$$

toma o menor valor possível para

$$x_k = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

e esse valor é 2^{-n}. Se $f \in C^{n+1}([-1,1])$ a fórmula de majoração do erro de interpolação escreve-se

$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

Nota. Os nós que acabámos de introduzir são chamados **nós de Chebyshev**. Eles são os $n+1$ zeros do chamado **polinómio de Chebyshev** de grau $n+1$, habitualmente designado por T_{n+1}, que introduziremos no capítulo seguinte.

Exemplo. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$.

(a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos $x_0 = -a,\ x_1 = 0, x_2 = a$, onde $a \in]0, 1]$.

(b) Determine um majorante do erro de interpolação válido para todos os pontos do intervalo $[-1, 1]$.

(c) Determine o valor de a para o qual o majorante do erro de interpolação tem o menor valor possível.

Resolução:

(a) $p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

x_i	$f[x_i]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
$-a$	$\cos a$		
		$\dfrac{1-\cos a}{a}$	
0	1		$\dfrac{\cos a - 1}{a^2}$
		$\dfrac{\cos a - 1}{a}$	
a	$\cos a$		

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \cos a + \frac{1-\cos a}{a}\,(x+a) + \frac{\cos a - 1}{a^2}\,(x+a)x \\ &= 1 - \frac{1-\cos a}{a^2}\,x^2 \end{aligned}$$

(b) $e_2(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{6}\,W_3(x)$

$$|e_2(x)| \le \frac{1}{6}\,\|f'''\|_\infty \|W_3\|_\infty$$

$$\|f'''\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f'''(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |\sin x| = \sin(1)$$

$$\|W_3\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |W_3(x)|$$

$$W_3(x) = (x+a)x(x-a) = x(x^2-a^2)$$

$$W_3'(x) = 3x^2 - a^2$$

$$\begin{aligned} \|W_3\|_\infty &= \max\left\{W_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right), W_3(1)\right\} = \max\left\{\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}, 1-a^2\right\} \\ &= \begin{cases} 1-a^2, & a \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{2a^3}{3\sqrt{3}}, & a \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\min_{a\in]0,1]} \|W_3\|_\infty = \frac{1}{4} \qquad \left(\text{para } a = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Note-se que $-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ são os nós de Chebyshev para $n = 2$.