MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 5. Resolução Numérica de Sistemas Não-Lineares

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

5. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

• Vamos agora considerar métodos iterativos para resolver sistemas de equações em $\mathbb{R}^n$,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x),$$

onde

$$x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$
$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = [f_1(x) \;\; f_2(x) \;\; \dots \;\; f_n(x)]^T,$$
$$g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad g(x) = [g_1(x) \;\; g_2(x) \;\; \dots \;\; g_n(x)]^T.$$

Definição. Sendo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, chama-se **matriz Jacobiana** de f à matriz de derivadas parciais, caso existam,

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x).$$

Método do ponto fixo

Definição. Diz-se que z é um **ponto fixo** de uma função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e só se $z = g(z)$.

Definição. O **método do ponto fixo** é o método iterativo a um passo da forma

$$x^{(m+1)} = g(x^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x^{(0)} = \xi_0 \in \mathbb{R}^n \ \text{(dado)}.$$

Definição. Uma função $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, diz-se uma **função de Lipschitz** ou **Lipschitziana** em D se existir um número real $L \geq 0$ tal que

$$\|g(x) - g(y)\|_V \leq L\|x - y\|_V, \qquad \forall x, y \in D.$$

onde V designa qualquer norma em $\mathbb{R}^n$. Se $L < 1$ a função diz-se **contractiva** ou uma **contracção** em D, com **constante de contractividade** L.

Teorema do ponto fixo (em $\mathbb{R}^n$). Seja $g : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contractiva num conjunto fechado $D \subset \mathbb{R}^n$ com constante de contractividade L e tal que $g(D) \subset D$. Então:

(1) g tem um e um só ponto fixo z em D;

(2) a sucessão $\{x^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, definida por $x^{(m+1)} = g(x^{(m)})$, converge para z, qualquer que seja $x^{(0)} \in D$;

(3) verificam-se as seguintes estimativas de erro:

(i) $\|e^{(m+1)}\|_V \leq L\|e^{(m)}\|_V$;

(ii) $\|e^{(m)}\|_V \leq L^m\|e^{(0)}\|_V$;

(iii) $\|e^{(m)}\|_V \leq \dfrac{1}{1-L}\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\|_V$;

(iv) $\|e^{(m+1)}\|_V \leq \dfrac{L}{1-L}\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\|_V$;

(v) $\|e^{(m)}\|_V \leq \dfrac{L^m}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_V$;

onde $e^{(m)} = z - x^{(m)}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ e V designa qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

Dem.: $(\cdots)$

Definição. Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **convexo** se

$$tx + (1-t)y \in D, \qquad \forall t \in [0,1], \qquad \forall x, y \in D,$$

isto é, se $x, y \in D$ então todos os pontos do segmento de recta que une x e y também pertencem a D.

Proposição. Seja $g \in C^1(D)$ onde D é um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. Então se

$$\sup_{x\in D} \|J_g(x)\|_M \leq L < 1,$$

a função g é contractiva em D segundo a norma M associada à norma vectorial V em $\mathbb{R}^n$ com constante de contractividade L.

Proposição. Seja D um conjunto fechado e convexo em $\mathbb{R}^n$ e $g \in C^1(D)$ uma função tal que:

(i) $g(D) \subset D$; (ii) $\sup_{x\in D} \|J_g(x)\|_M \leq L < 1$.

Então são válidas as conclusões do teorema do ponto fixo.

Proposição (da convergência local). Seja $g \in C^1(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, tal que $r_\sigma(J_g(z)) < 1$. Então o método do ponto fixo converge para z desde que $x^{(0)}$ esteja suficientemente perto de z. Além disso as estimativas de erro (i)-(v) são válidas em alguma bola fechada contida em V_z e que contenha z.

Exemplo. Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2^2 \\ x_1^2 + 3x_2 - 1 \end{bmatrix}. \tag{S}$$

(a) Mostre que o sistema (S) tem uma e uma só solução z no conjunto

$$D = \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

(b) Mostre que o sistema (S) tem uma e uma só solução $\tilde{z}$ no conjunto

$$\tilde{D} = [-4, -2] \times [-4, -2]\,.$$

(c) Utilize o método do ponto fixo para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(d) Mostre que o sistema (S) tem apenas duas soluções, z e $\tilde{z}$, em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

(a)

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \qquad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2^2}{3} \\ \frac{1}{3}\left(1 - x_1^2\right) \end{bmatrix}$$

O teorema do ponto fixo diz-nos que g terá um e um só ponto fixo em D se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$\text{(i) } g \in C^1(D) \qquad \text{(ii) } g(D) \subset D \qquad \text{(iii) } \max_{x \in D} \|J_g(x)\|_\infty < 1$$

Verifiquemos pois estas condições.

(i) g_1 e g_2 são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e portanto em D.

(ii) $$\left.\begin{array}{l} g_1(x) \in \left[-\frac{1}{27}, 0\right] \subset \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \quad \forall x \in D \\ g_2(x) \in \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \forall x \in D \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g(D) \subset D$$

(iii) $$J_g(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2x_2}{3} \\ -\frac{2x_1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\max_{x \in D} \|J_g(x)\|_\infty = \max_{x \in D} \max\left\{\frac{2|x_2|}{3}, \frac{2|x_1|}{3}\right\} = \frac{2}{9} < 1$$

(b)

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tilde{g}(x), \qquad \tilde{g}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{g}_1(x) \\ \tilde{g}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - 3x_2} \\ -\sqrt{-3x_1} \end{bmatrix}$$

O teorema do ponto fixo diz-nos que $\tilde{g}$ terá um e um só ponto fixo em $\tilde{D}$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$\text{(i) } \tilde{g} \in C^1(\tilde{D}) \qquad \text{(ii) } \tilde{g}(\tilde{D}) \subset \tilde{D} \qquad \text{(iii) } \max_{x \in \tilde{D}} \|J_{\tilde{g}}(x)\|_\infty < 1$$

Verifiquemos pois estas condições.

(i) $\tilde{g}_1$ e $\tilde{g}_2$ são continuamente diferenciáveis em $]-\infty, 0[\, \times \,]-\infty, \frac{1}{3}[$ e portanto em $\tilde{D}$.

(ii) $$\left.\begin{array}{ll} \tilde{g}_1(x) \in \left[-\sqrt{13}, -\sqrt{7}\right] \subset [-4,-2]\,, & \forall x \in \tilde{D} \\ \tilde{g}_2(x) \in \left[-\sqrt{12}, -\sqrt{6}\right] \subset [-4,-2]\,, & \forall x \in \tilde{D} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}(\tilde{D}) \subset \tilde{D}$$

(iii) $$J_{\tilde{g}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3/2}{\sqrt{1-3x_2}} \\ \frac{3/2}{\sqrt{-3x_1}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\max_{x\in\tilde{D}} \|J_{\tilde{g}(x)}\|_\infty = \max_{x\in\tilde{D}} \max\left\{\frac{3/2}{\sqrt{1-3x_2}}, \frac{3/2}{\sqrt{-3x_1}}\right\} = \frac{\sqrt{6}}{4} < 1$$

(c)

$$x^{(m+1)} = g\left(x^{(m)}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x^{(0)} \in D$$

$$\|z - x^{(m)}\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_\infty \equiv B_m$$

$$L = \max_{x\in D} \|J_g(x)\|_\infty = \frac{2}{9}$$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$\|x^{(m)} - x^{(m-1)}\|_\infty$	B_m
0	0.000000000000000	0.000000000000000		
1	0.000000000000000	0.333333333333333	0.333×10^{0}	0.952×10^{-1}
2	−0.037037037037037	0.333333333333333	0.370×10^{-1}	0.106×10^{-1}
3	−0.037037037037037	0.332876085962506	0.457×10^{-3}	0.131×10^{-3}
4	−0.036935496201906	0.332876085962506	0.102×10^{-3}	0.290×10^{-4}
5	−0.036935496201906	0.332878589706773	0.250×10^{-5}	0.715×10^{-6}
6	−0.036936051828390	0.332878589706773		
7	−0.036936051828390	0.332878576025110		
8	−0.036936048792168	0.332878576025110		
9	−0.036936048792168	0.332878576099874		
10	−0.036936048808760	0.332878576099874		
11	−0.036936048808760	0.332878576099466		
12	−0.036936048808669	0.332878576099466		
13	−0.036936048808669	0.332878576099468		
14	−0.036936048808670	0.332878576099468		

(d)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 + 3x_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_2^2}{3} \\ x_2^4 + 27x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$h(t) = t^4 + 27t - 9$$

$$h'(t) = 4t^3 + 27, \qquad h''(t) = 12t^2$$

$$h'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \equiv t_m, \qquad h(t_m) \approx -47.2701$$

$h(t) \to \infty$ quando $|t| \to \infty$

$\Rightarrow$ h tem apenas duas raízes em $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ O sistema dado tem apenas duas raízes em $\mathbb{R}^2$.

Método de Newton generalizado

Definição. O **método de Newton** é o método iterativo a um passo da forma

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - [J_f(x^{(m)})]^{-1} \cdot f(x^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x^{(0)} = \xi_0 \ \text{(dado)}.$$

Na prática resolve-se em cada iteração o sistema linear

$$J_f(x^{(m)}) \cdot \Delta x^{(m)} = -f(x^{(m)}),$$

e define-se a iterada seguinte por

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} + \Delta x^{(m)}.$$

Teorema de Kantorovich (condições suficientes de convergência).[1]

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e convexo e $f \in C^1(D)$. Suponhamos que para alguma norma em $\mathbb{R}^n$ e algum $x^{(0)} \in D$ são verificadas as seguintes condições:

(i) $\det(J_f(x)) \neq 0, \ \forall x \in D; \quad \exists M_1 > 0 : \|[J_f(x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{M_1}, \ \forall x \in D;$

(ii) $\exists M_2 > 0 : \|J_f(x) - J_f(y)\| \leq M_2\|x - y\|, \ \forall x, y \in D$;

(iii) sendo $\varepsilon_0 = 2\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$ e $K = \frac{M_2}{2M_1}$, verifica-se a desigualdade $2K\varepsilon_0 < 1$;

(iv) $\bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0) \subset D$.

Então:

(1) f tem um único zero $z \in \bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0)$;

(2) a sucessão de Newton com condição inicial $x^{(0)}$ é bem definida, permanece em $\bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0)$ e converge para z.

(3) verifica-se a estimativa de erro a priori

$$\|z - x^{(m)}\| \leq \frac{1}{K} (K\varepsilon_0)^{2^m}.$$

[1] Este teorema e a sua aplicação ao cálculo de estimativas de erro das iteradas do método de Newton, ilustrada no exemplo que encerra este capítulo, não aparecerão nas provas escritas de avaliação.

Nota. Se $f \in C^2(D)$ a condição (ii) pode ser substituída pela condição:

$$\text{(ii)'} \quad \exists M_2 > 0 : \|H_{f_i}(x)\| \leq M_2, \quad \forall x \in D, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

onde f_i designa uma componente de f e H_{f_i} é a matriz Hessiana de f_i, com componentes

$$(H_{f_i})_{jk} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Notas.

- ◇ A condição (i) implica a existência de inversa para a matriz Jacobiana (equivalente no caso real a $f'(x) \neq 0$), e serve ao mesmo tempo para definir M_1 (que corresponde no caso real a $\min |f'(x)|$).
- ◇ A condição (ii) implica a limitação dos valores da matriz Hessiana (caso $f \in C^2$) e define M_2 (que corresponde no caso real a $\max |f''(x)|$).
- ◇ A condição (iii) permite garantir que as iteradas vão permanecer na bola $\bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0)$ (e corresponde no caso real à condição $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a, \ \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a$).
- ◇ A condição (iv) é óbvia e podemos mesmo considerar $\bar{D} = \bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0)$.

Proposição (da convergência local). Seja $f \in C^2(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, zero de f, tal que $\det(J_f(z)) \neq 0$. Então o método de Newton converge para z desde que $x^{(0)}$ esteja suficientemente perto de z.

Proposição (da ordem de convergência). Seja $f \in C^2(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, zero de f, tal que $\det(J_f(z)) \neq 0$. Então o método de Newton, quando converge para z, tem convergência pelo menos quadrática, isto é, existe $K > 0$ tal que

$$\|z - x^{(m+1)}\| \leq K\|z - x^{(m)}|^2, \qquad m \in \mathbb{N},$$

ou

$$\|z - x^{(m)}\| \leq \frac{1}{K} \left(K\|z - x^{(0)}|\right)^{2^m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Exemplo. Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2^2 \\ x_1^2 + 3x_2 - 1 \end{bmatrix}. \tag{S}$$

para o qual se verificou que tinha apenas duas raízes em $\mathbb{R}^2$, z e $\tilde{z}$.

(a) Determine o valor aproximado da raiz z usando três iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x = [0 \ \ 0]^T$.

(b) Obtenha uma estimativa do erro da solução aproximada obtida na alínea (a) (usando a norma do máximo).

Resolução:

(a)

$$\begin{cases} x^{(m+1)} = x^{(m)} + \Delta x^{(m)} \\ J_f\left(x^{(m)}\right)\Delta x^{(m)} = -f\left(\tilde{x}^{(m)}\right) \end{cases}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad x^{(0)} = [0\ \ 0]^T$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 3 & 2x_2 \\ 2x_1 & 3 \end{bmatrix}$$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$
0	0.000000000000000	0.000000000000000
1	0.000000000000000	0.333333333333333
2	-0.037037037037037	0.333333333333333
3	-0.036935981001465	0.332878581173261
4	-0.036936048808670	0.332878576099469
5	-0.036936048808670	0.332878576099468

(b)

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 3 & 2x_2 \\ 2x_1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad [J_f(x)]^{-1} = \frac{1}{9 - 4x_1x_2}\begin{bmatrix} 3 & -2x_2 \\ -2x_1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_{f_1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H_{f_2}(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = 2\|\Delta x^{(0)}\|_\infty$$

$$\bar{D} = \bar{B}(x^{(0)}, \varepsilon_0) = [x_1^{(0)} - \varepsilon_0, x_1^{(0)} + \varepsilon_0] \times [x_2^{(0)} - \varepsilon_0, x_2^{(0)} + \varepsilon_0]$$

$$\frac{1}{M_1} = \max_{x\in D} \|\,[J_f(x)]^{-1}\,\|_\infty, \qquad \|\,[J_f(x)]^{-1}\,\|_\infty = \frac{\max\{3 + 2|x_2|, 3 + 2|x_1|\}}{|9 - 4x_1x_2|}$$

$$M_2 = \max_{x\in D}\{\|H_{f_1}(x)\|_\infty, \|H_{f_2}(x)\|_\infty\} = 2$$

$$K = \frac{M_2}{2M_1} = \frac{1}{M_1}, \qquad K\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$$

$$\|z - x^{(m)}\|_\infty \le \frac{1}{K}\left(K\varepsilon_0\right)^{2^m}$$

Estimativa de erro:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3}, \qquad D = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$K = \frac{1}{M_1} = \frac{3}{5} = 0.6, \qquad K\varepsilon_0 = \frac{2}{5} = 0.4 < \frac{1}{2}$$

$$\|z - x^{(3)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^8 = 0.109 \times 10^{-2}$$

$$\|z - x^{(4)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^{16} = 0.716 \times 10^{-6}$$

c.f. $\|z - x^{(3)}\|_\infty = 0.678 \times 10^{-7}, \qquad \|z - x^{(4)}\|_\infty = 0.1 \times 10^{-14}$

Melhoria da estimativa:

$$\tilde{x}^{(0)} = x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad \Delta\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{27} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{27}, \qquad D = \left[-\frac{2}{27}, \frac{2}{27}\right] \times \left[\frac{7}{27}, \frac{11}{27}\right]$$

$$K = \frac{1}{M_1} = \frac{2781}{6473} = 0.429631, \qquad K\varepsilon_0 = \frac{206}{6473} = 0.0318245 < \frac{1}{2}$$

$$\|z - x^{(3)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^4 = 0.239 \times 10^{-5}$$

$$\|z - x^{(4)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^8 = 0.246 \times 10^{-11}$$

Melhoria da estimativa:

$$\tilde{x}^{(0)} = x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad \Delta\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{19791} \\ -\frac{1}{2199} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{2199}, \qquad D = \left[-\frac{751}{19791}, -\frac{715}{19791}\right] \times \left[\frac{731}{2199}, \frac{735}{2199}\right]$$

$$K = \frac{1}{M_1} = 0.405434, \qquad K\varepsilon_0 = 0.368744 \times 10^{-3} < \frac{1}{2}$$

$$\|z - x^{(3)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^2 = 0.336 \times 10^{-6}$$

$$\|z - x^{(4)}\|_\infty \leq \frac{1}{K}\,(K\varepsilon_0)^4 = 0.457 \times 10^{-13}$$