MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 3. Resolução Numérica de Equações Não-Lineares

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

3. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Localização de raízes: teoremas elementares da Análise Matemática

• Sendo $f \in C([a,b])$ a equação $f(x) = 0$ pode não ter soluções, pode ter uma única solução ou pode ter mais do que uma solução no intervalo $[a,b]$.

Exemplo. A função $f_\varepsilon : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x) = x^4 - 4x^2 + \varepsilon$, tem um número de zeros no intervalo $[-3,3]$ que varia com o parâmetro ε entre zero e quatro.

Valores de ε	$]-\infty,-45[$	$[-45,0[$	0	$]0,4[$	4	$]4,\infty[$
Número de zeros de f_ε	0	2	3	4	2	0

• Os resultados seguintes (*Introdução à Análise Matemática*, Jaime Campos Ferreira, Fundação Calouste Gulbenkian) são essenciais para a localização de raízes de funções reais de variável real.

Teorema (do valor intermédio). Seja f uma função contínua num intervalo I, a e b dois pontos de I tais que $f(a) \neq f(b)$; então, qualquer que seja o númro k (estritamente) compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um ponto c (estritamente) compreendido entre a e b tal que $f(c) = k$.

Teorema (de Rolle). Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) e diferenciável em $]a,b[$; se $f(a) = f(b)$, existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário. Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há, pelo menos, um zero da sua derivada.

Corolário. Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo não pode haver mais de um zero dessa função.

Teorema (de Lagrange). Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

• O seguinte corolário do teorema de Lagrange é útil na obtenção de estimativas de erros de aproximações de zeros de funções:

Corolário. Seja $\tilde{z}$ uma aproximação do zero z da função $f \in C^1([\tilde{z}; z])$. Então:

$$|e_{\tilde{z}}| = |z - \tilde{z}| \leq \frac{|f(\tilde{z})|}{\min\limits_{\xi \in [\tilde{z}; z]} |f'(\xi)|}.$$

Localização de raízes: método da bissecção

Definição. Seja $f \in C([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$, pelo que f tem pelo menos um zero no intervalo $[a,b] = I$. O **método da bissecção** consiste em construir a partir do intervalo $I_0 = [a_0, b_0] = I$ uma sucessão de subintervalos $I_m = [a_m, b_m] \subset I, \;\; m \in \mathbb{N}_1$, em que um dos extremos de I_m é o ponto médio de I_{m-1},

$$x_{m-1} = \frac{1}{2}(a_{m-1} + b_{m-1}),$$

e o outro é ou a_{m-1} ou b_{m-1}, por forma a que $f(a_m)f(b_m) < 0$, o que se consegue pondo:

(i) $a_m = a_{m-1}, \;\; b_m = x_{m-1}, \quad$ se $\quad f(a_{m-1})f(x_{m-1}) < 0$;

(ii) $a_m = x_{m-1}, \;\; b_m = b_{m-1}, \quad$ se $\quad f(x_{m-1})f(b_{m-1}) < 0$.

Notando que

$$b_m - a_m = \frac{1}{2}(b_{m-1} - a_{m-1}),$$

verifica-se que um zero de f vai sendo sucessivamente confinado a intervalos cada vez mais pequenos.

Nota. O método da bissecção pode descrever-se analíticamente pela fórmula:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{b-a}{2^{m+2}} \operatorname{sgn}[f(a)f(x_m)], \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Proposição. Seja $f \in C([a,b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e que tem apenas uma raiz z em $[a,b]$. Então o método da bissecção converge para z e verificam-se as seguintes estimativas de erro:

(1) $|z - x_m| \leq \dfrac{b-a}{2^{m+1}}, \qquad m \geq 0;$ (Estimativa “a priori”)

(2) $|z - x_m| \leq |x_m - x_{m-1}|, \qquad m \geq 1.$ (Estimativa “a posteriori”)

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo. Determinação da raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 2 = 0$ com um erro inferior a 10^{-4}.

A equação tem uma e uma só raiz no intervalo $I = [0,2]$ pois

$$f(0) = -2, \qquad f(2) = 2, \qquad f'(x) = 2x \geq 0, \;\; \forall x \in I.$$

Calculemos o menor valor de m para o qual $|z - x_m| \leq \varepsilon$:

$$|z - x_m| \leq \frac{b-a}{2^{m+1}} \leq \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; m \geq \frac{\log \dfrac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} - 1$$

Para $[a,b] = [0,2], \;\; \varepsilon = 10^{-4}$ obtém-se $m \geq 13.3$. logo $m = 14$.

m	a_m	b_m	x_m	$f(x_m)$	$x_m - x_{m-1}$	$z - x_m$
0	0.000000	2.000000	1.000000	-1.000000		0.414214
1	1.000000	2.000000	1.500000	0.250000	0.500000	-0.085787
2	1.000000	1.500000	1.250000	-0.437500	-0.250000	0.164214
3	1.250000	1.500000	1.375000	-0.109375	0.125000	0.039214
4	1.375000	1.500000	1.437500	0.066406	0.062500	-0.023287
5	1.375000	1.437500	1.406250	-0.022461	-0.003125	0.007964
6	1.406250	1.437500	1.421875	0.021729	0.015625	-0.007662
7	1.406250	1.421875	1.414063	-0.000427	-0.007812	0.000151
8	1.414063	1.421875	1.417969	0.010635	0.003906	-0.003756
9	1.414063	1.417969	1.416016	0.005100	-0.001953	-0.001803
10	1.414063	1.416016	1.415039	0.002336	-0.000977	-0.000826
11	1.414063	1.415039	1.414551	0.000954	-0.000488	-0.000337
12	1.414063	1.414551	1.414307	0.000263	-0.000244	-0.000093
13	1.414063	1.414307	1.414185	-0.000082	-0.000122	0.000029
14	1.414185	1.414307	1.414246	0.000091	0.000061	-0.000032

Notas.

(a) O método da bissecção é um método iterativo a um passo com função iteradora descontínua.

(b) O método é sempre convergente desde que $f(a)f(b) < 0$, mas a convergência pode ser muito lenta.

(c) Não se pode afirmar que o método tem convergência linear mas apenas que tem semelhanças com métodos com convergência linear. Com efeito a sucessão dos majorantes do erro $\{w_m\}$, $\;w_m = \frac{b-a}{2^{m+1}}$, converge linearmente com factor assimptótico de convergência $K_\infty^{[1]} = \frac{1}{2}$.

(d) A estimativa "a posteriori" pode ser utilizada como **critério de paragem** para o método iterativo.

(e) O método da bissecção é útil para a localização de raízes e para a inicialização de métodos mais rápidos cuja convergência só é garantida com uma boa aproximação inicial.

Método do ponto fixo

Definição. Diz-se que z é um **ponto fixo** de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se e só se $z = g(z)$.

Notas.

(a) Podemos transformar qualquer equação $f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, numa equação $x = g(x)$, estabelecendo a equivalência

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x),$$

num certo domínio D. É claro que se $z \in D$ for zero da função f então será ponto fixo de g e vice-versa.

(b) Há infinitas possibilidades de escolher g (a função iteradora) de forma a que a equivalência se verifique. Por exemplo, basta pensar que se $\omega \neq 0$ temos

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x + \omega f(x),$$

Como iremos ver, algumas escolhas de g não serão apropriadas, ou serão menos apropriadas do que outras, para o objectivo em vista.

Definição. O **método do ponto fixo** é o método iterativo a um passo da forma

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = \xi_0 \text{ dado.}$$

Nota. Considerando g uma função contínua, se o método convergir, convergirá para um ponto fixo z que, pela equivalência estabelecida, será uma raiz da equação, ou seja, $f(z) = 0$.

Exemplo. Utilização do método do ponto fixo com as funções iteradoras:

$$\text{(a)}\ \ g(x) = x + \omega(x^2 - 3); \qquad \text{(b)}\ \ g(x) = \frac{3}{x}; \qquad \text{(c)}\ \ g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right);$$

no cálculo da raiz positiva da equação $x^2 - 3 = 0$.

n	x_n			
	(a) $\omega = 1$	(b)	(c)	(a) $\omega = -1/4$
0	2.0	2.0	2.0	2.0
1	3.0	1.5	1.750000000000000	1.750000000000000
2	9.0	2.0	1.732142857142857	1.734375000000000
3	87.0	1.5	1.732050810014728	1.732360839843750
4	7563.0	2.0	1.732050807568877	1.732092319987714
5		1.5	1.732050807568877	1.732056368747609
6				1.732051552617821
7				1.732050907386370
8				1.732050820941883
9				1.732050809360520
10				1.732050807808912
11				1.732050807601036
12				1.732050807573186
13				1.732050807569455
14				1.732050807568955
15				1.732050807568888
16				1.732050807568879
17				1.732050807568877

Exemplo.

(a) Ilustração da convergência *monótona* para o ponto fixo da sucessão gerada pelo método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = 2 - \cos x$ e valor inicial $x_0 = 3$.

(b) Ilustração da convergência *alternada* para o ponto fixo da sucessão gerada pelo método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = 2 + 0.8 \cos x$ e valor inicial $x_0 = 3$.

(c) Ilustração da não convergência para o ponto fixo da sucessão gerada pelo método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x - 3\sin x)$ e valor inicial $x_0 = 1.6$.

(d) Ilustração da não convergência para o ponto fixo da sucessão gerada pelo método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = 2 + 1.5 \cos x$ e valor inicial $x_0 = 1.6$.

Definição. Uma função $g : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo fechado, diz-se uma **função de Lipschitz** ou **Lipschitziana** em I se existir um número real $L \geq 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall x, y \in I.$$

Se $L < 1$ a função diz-se **contractiva** ou uma **contracção** em I, com **constante de contractividade** L.

Exemplo.

(a) $f : [-a, a] \to \mathbb{R}, \ \ a > 0, \ \ f(x) = |x|$.

É função de Lipschitz com $L = 1$.

(b) $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ \ b > a > 0, \ \ f(x) = x^{1/2}$.

É função de Lipschitz com $L = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. É contracção para $a > \dfrac{1}{4}$.

Teorema do ponto fixo (em $\mathbb{R}$). Seja $g : I \to \mathbb{R}$ uma função contractiva num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com constante de contractividade L e tal que $g(I) \subset I$. Então:

(1) g tem um e um só ponto fixo z em I;

(2) a sucessão $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m)$ converge para z, qualquer que seja $x_0 \in I$;

(3) verificam-se as seguintes estimativas de erro:

(i) $|z - x_{m+1}| \leq L|z - x_m|$;

(ii) $|z - x_m| \leq L^m|z - x_0|$;

(iii) $|z - x_m| \leq \dfrac{1}{1 - L}|x_{m+1} - x_m|$;

(iv) $|z - x_{m+1}| \leq \dfrac{L}{1 - L}|x_{m+1} - x_m|$;

(v) $|z - x_m| \leq \dfrac{L^m}{1-L}|x_1 - x_0|$.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. A função $g \in C^1(I)$ é contractiva em I se e só se

$$\max_{x\in I} |g'(x)| < 1.$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $g \in C^1(I)$ uma função tal que:

(i) $g(I) \subset I$; (ii) $L = \max_{x\in I} |g'(x)| < 1$.

Então são válidas as conclusões do teorema do ponto fixo.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (da convergência monótona e alternada). Seja $g \in C^1(I)$ uma função tal que $g(I) \subset I$.

(1) Seja $0 < g'(x) < 1, \ \ \forall x \in I$. Se $x_0 \in I$ há convergência monótona do método do ponto fixo (isto é, as iteradas ficam todas à esquerda (respectivamente à direita) do ponto fixo se a iterada inicial estiver à esquerda (respectivamente à direita) do ponto fixo).

(2) Seja $-1 < g'(x) < 0, \ \ \forall x \in I$. Se $x_0 \in I$ há convergência alternada do método do ponto fixo (isto é, as iteradas ficam alternadamente à esquerda e à direita do ponto fixo).

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (da convergência local). Seja $g \in C^1(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, com $|g'(z)| < 1$. Então são válidas as conclusões do teorema do ponto fixo desde que x_0 esteja suficientemente perto de z.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (da não convergência para um ponto fixo). Seja $g \in C^1(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, com $|g'(z)| > 1$. Então a sucessão $\{x_m\}, x_{m+1} = g(x_m)$, <u>não</u> pode convergir para esse ponto fixo (a não ser que "excepcionalmente" $x_m = z$ para algum m).

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (da convergência local, linear). Seja $g \in C^1(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de

z, ponto fixo de g, com $0 < |g'(z)| < 1$. Então, para qualquer x_0 para o qual o método do ponto fixo converge para z, tem-se:

$$(1)\quad z - x_{m+1} = g'(\xi_m)(z - x_m), \qquad \xi_m \in]z; x_m[\ ;$$

$$(2)\quad \lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{z - x_m} = g'(z).$$

Dem.: $(\cdots)$

Nota. O método do ponto fixo tem neste caso convergência linear com coeficiente assimptótico de convergência

$$K_\infty^{[1]} = |g'(z)|\,.$$

Proposição (da convergência local, supra-linear). Seja $g \in C^p(V_z)$, $p \geq 2$, onde V_z é uma vizinhança de z, ponto fixo de g, tal que

$$g'(z) = \cdots = g^{(p-1)}(z) = 0, \qquad g^{(p)}(z) \neq 0.$$

Então, para qualquer x_0 para o qual o método do ponto fixo converge para z, tem-se:

$$(1)\quad z - x_{m+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{p!}\, g^{(p)}(\xi_m)(z - x_m)^p, \qquad \xi_m \in]z; x_m[\ ;$$

$$(2)\quad \lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^p} = \frac{(-1)^{p+1}}{p!}\, g^{(p)}(z)\ .$$

Dem.: $(\cdots)$

Nota. O método do ponto fixo tem neste caso convergência de ordem p com coeficiente assimptótico de convergência

$$K_\infty^{[p]} = \frac{1}{p!}\, \left|g^{(p)}(z)\right|.$$

Exemplo. Considere-se o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 4x + 1.$$

(a) Mostrar que o polinómio tem três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [-2.2, -2.0], \qquad z_2 \in [0.1, 0.3], \qquad z_3 \in [1.8, 2.0].$$

(b) Mostrar que o método do ponto fixo com função iteradora g_1, definida por

$$g_1(x) = (4x - 1)^{1/3}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

converge para a raiz z_1 para qualquer $x_0 \in [-2.2, -2.0]$.

(c) Utilizar o método do ponto fixo com função iteradora g_1 para obter um valor aproximado da raiz z_1 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(d) Mostrar que o método do ponto fixo com função iteradora g_1 pode ser utilizado para calcular a raiz z_3 mas não a raiz z_2.

(e) Mostrar que o método do ponto fixo com função iteradora g_2, definida por

$$g_2(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1), \qquad x \in \mathbb{R},$$

pode ser utilizado para calcular a raiz z_2 mas não qualquer das outras raízes.

(f) Mostrar que o método do ponto fixo com função iteradora g_3, definida por

$$g_3(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0,$$

pode ser utilizado para calcular a raiz z_3 mas não qualquer das outras raízes.

Resolução:

(a)
$$\left.\begin{array}{l} p(-2.2) = -0.848 \\ p(-2.0) = 1.0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ p \ \text{ tem pelo menos uma raiz em } I_1 = [-2.2, -2.0]$$

$$\left.\begin{array}{l} p(0.1) = 0.601 \\ p(0.3) = -0.173 \end{array}\right\} \Rightarrow \ p \ \text{ tem pelo menos uma raiz em } I_2 = [0.1, 0.3]$$

$$\left.\begin{array}{l} p(1.8) = -0.368 \\ p(2.0) = 1.00 \end{array}\right\} \Rightarrow \ p \ \text{ tem pelo menos uma raiz em } I_3 = [1.8, 2.0]$$

Sendo p um polinómio do 3º grau conclui-se que p tem exactamente três raízes reais, uma em cada um dos intervalos indicados.

(b) $p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g_1(x)$

$$g_1(x) = (4x-1)^{1/3}, \qquad g_1'(x) = \frac{4}{3}(4x-1)^{-2/3}, \qquad g_1''(x) = -\frac{32}{9}(4x-1)^{-5/3}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(-2.2) = -2.14 \in I_1 \\ g_1(-2.0) = -2.08 \in I_1 \\ g_1'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ g_1(I_1) \subset I_1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_1 \\ g_1''(x) > 0, \ \ \forall x \in I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \max_{x \in I_1} |g_1'(x)| = |g_1'(-2.0)| = 0.308161 < 1$$

$\Rightarrow$ g_1 tem um e um só ponto fixo $z_1 \in I_1$ para o qual o método do ponto fixo com função iteradora g_1 converge, $\forall x_0 \in I_1$.

(c) $x_{m+1} = g_1(x_m), \ \ m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \in I_1$

$$|z_1 - x_m| \le \frac{L}{1-L}\,|x_m - x_{m-1}| =: B_m$$

$$L = \max_{x\in I_1} |g_1'(x)| = 0.308161$$

m	x_m	B_m
0	-2.1	
1	-2.11045429	0.466×10^{-2}
2	-2.11357921	0.139×10^{-2}
3	-2.11451150	0.415×10^{-3}
4	-2.11478948	0.124×10^{-3}
5	-2.11487235	0.369×10^{-4}
6	-2.11489705	0.110×10^{-4}
7	-2.11490441	0.328×10^{-5}
8	-2.11490661	0.978×10^{-6}

$z_1 \approx x_8 = -2.11491$

Note-se que $z_1 = -2.114907541476755\ldots$

$$|z_1 - x_7| = 0.313 \times 10^{-5}, \qquad |z_1 - x_8| = 0.932 \times 10^{-6}$$

(d) $$\left.\begin{array}{l} g_1'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_3 \\ g_1''(x) < 0, \ \ \forall x \in I_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{x\in I_3} |g_1'(x)| = |g_1'(1.8)| = 0.395 < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1.8) = 1.84 \in I_3 \\ g_1(2.0) = 1.91 \in I_3 \\ g_1'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_3 \end{array}\right\} \Rightarrow g_1(I_3) \subset I_3.$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_1 converge para z_3, $\forall x_0 \in I_3$.

$\tilde{I}_2 = [0.251, 0.3]$

$$\left.\begin{array}{l} p(0.251) = 0.0118 \\ p(0.3) = -0.173 \end{array}\right\} \Rightarrow z_2 \in \tilde{I}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1'(x) > 0, \ \ \forall x \in \tilde{I}_2 \\ g_1''(x) < 0, \ \ \forall x \in \tilde{I}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \min_{x\in \tilde{I}_2} |g_1'(x)| = |g_1'(0.3)| = 3.90 > 1$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_1 não pode convergir para z_2.

(e) $$g_2(x) = \frac{1}{4}(x^3+1), \qquad g_2'(x) = \frac{3x^2}{4}, \qquad g_2''(x) = \frac{3x}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_2 \\ g_2''(x) > 0, \ \ \forall x \in I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \max_{x\in I_2} |g_2'(x)| = |g_2'(0.3)| = 0.0675 < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2(0.1) = 0.250 \in I_2 \\ g_2(0.3) = 0.257 \in I_2 \\ g_2'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ g_2(I_2) \subset I_2.$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_2 converge para z_2, $\forall x_0 \in I_2$.

$$\left.\begin{array}{l} g_2'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_1 \\ g_2''(x) < 0, \ \ \forall x \in I_1 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \min_{x \in I_1} |g_2'(x)| = |g_2'(-2.0)| = 3.0 > 1$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_2 não pode convergir para z_1.

$$\left.\begin{array}{l} g_2'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_3 \\ g_2''(x) > 0, \ \ \forall x \in I_3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \min_{x \in I_3} |g_2'(x)| = |g_2'(1.8)| = 2.43 > 1$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_2 não pode convergir para z_3.

(f) $g_3(x) = \dfrac{4}{x^2}\left(x - \dfrac{1}{4}\right), \qquad g_3'(x) = \dfrac{4}{x^3}\left(\dfrac{1}{2} - x\right), \qquad g_3''(x) = \dfrac{8}{x^4}\left(x - \dfrac{3}{4}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} g_3'(x) < 0, \ \ \forall x \in I_3 \\ g_3''(x) > 0, \ \ \forall x \in I_3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \max_{x \in I_3} |g_3'(x)| = |g_3'(1.8)| = 0.892 < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3(1.8) = 1.91 \in I_3 \\ g_3(2.0) = 1.75 \notin I_3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ g_3(I_3) \not\subset I_3$$

$\tilde{I}_3 = [1.8, 1.93]$

$$\left.\begin{array}{l} p(1.8) = -0.368 \\ p(1.93) = 0.469 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ z_3 \in \tilde{I}_3$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3(1.8) = 1.91358 \in \tilde{I}_3 \\ g_3(1.93) = 1.80408 \in \tilde{I}_3 \\ g_3'(x) < 0, \ \ \forall x \in \tilde{I}_3 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ g_3(\tilde{I}_3) \subset \tilde{I}_3.$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_3 converge para z_3, $\forall x_0 \in \tilde{I}_3$.

$$\left.\begin{array}{l} g_3'(x) < 0, \ \ \forall x \in I_1 \\ g_3''(x) < 0, \ \ \forall x \in I_1 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \min_{x \in I_1} |g_3'(x)| = |g_3'(-2.2)| = 1.01 > 1$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_3 não pode convergir para z_1.

$$\left.\begin{array}{l} g_3'(x) > 0, \ \ \forall x \in I_2 \\ g_3''(x) < 0, \ \ \forall x \in I_2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \min_{x \in I_2} |g_3'(x)| = |g_3'(0.3)| = 29.6 > 1$$

$\Rightarrow$ O método do ponto fixo com f. iteradora g_3 não pode convergir para z_2.

Método de Newton

Definição. O **método de Newton** é o método iterativo a um passo da forma

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = \xi_0 \text{ dado.}$$

Nota. O método de Newton pode ser interpretado geométricamente da seguinte forma: a iterada x_{m+1} é a intersecção do eixo das abcissas com a recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_m, f(x_m))$, cuja equação é

$$y = f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m).$$

Proposição (condições suficientes de convergência). Seja $f \in C^2(I)$, $I = [a, b]$, uma função que verifica as seguintes condições:

(1) $f(a)f(b) \leq 0$;

(2) $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in I$;

(3) $f''(x) \geq 0$ ou $f''(x) \leq 0, \ \forall x \in I$;

(4) (a) $f(x_0)f''(x) \geq 0, \ \forall x \in I, \quad x_0 \in I$;

ou

(b) $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a$.

Então o método de Newton converge monotonamente para a única solução z de $f(x) = 0$ em I.

Dem.: $(\cdots)$

Proposição (da convergência local, quadrática). Seja $f \in C^2(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, raiz de f, tal que $f'(z) \neq 0, \ \ f''(z) \neq 0$. Então, para qualquer x_0 suficientemente próximo de z, a sucessão $\{x_m\}$ definida pelo método de Newton converge para z. Além disso:

(1) (Fórmula do erro)

$$z - x_{m+1} = -\frac{f''(\xi_m)}{2f'(x_m)} \, (z - x_m)^2 , \qquad \xi_m \in]z; x_m[$$

(2) (Estimativa do erro)

$$|z - x_{m+1}| \leq K|z - x_m|^2, \qquad K = \frac{\max_{x\in I} |f''(x)|}{2 \min_{x\in I} |f'(x)|},$$

ou

$$|z - x_m| \leq \frac{1}{K} \, (K|z - x_0|)^{2^m} , \qquad m \geq 0,$$

onde $I = [z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subset V_z$ é tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, $K\varepsilon < 1$, e $x_0 \in I$.

(3) (Ordem de convergência 2)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^2} = -\frac{f''(z)}{2f'(z)}.$$

Dem.: $(\cdots)$

Nota. O método de Newton tem pois convergência de ordem 2 com coeficiente assimptótico de convergência

$$K_\infty^{[2]} = \left|\frac{f''(z)}{2f'(z)}\right|.$$

• O método de Newton pode ser encarado como um caso particular do método do ponto fixo com função iteradora g definida por

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Usando os resultados sobre a convergência local e supra-linear do método do ponto fixo obtemos o seguinte resultado:

Proposição (da convergência local, quadrática e supra-quadrática). Seja $f \in C^{p+1}(V_z)$, $p \geq 2$, onde V_z é uma vizinhança de z, raiz de f, tal que:

(i) $f'(z) \neq 0$, $\quad f''(z) \neq 0$, $\qquad$ se $p = 2$;

(ii) $f'(z) \neq 0$, $\quad f''(z) = \cdots = f^{(p-1)}(z) = 0$, $\quad f^{(p)}(z) \neq 0$, $\qquad$ se $p \geq 3$.

Então, para qualquer x_0 suficientemente próximo de z, o método de Newton converge para z, e

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^p} = (-1)^{p+1} \frac{p-1}{p!} \frac{f^{(p)}(z)}{f'(z)}.$$

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo. Considere-se o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 4x + 1,$$

para o qual se verificou a existência de três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [-2.2, -2.0], \qquad z_2 \in [0.1, 0.3], \qquad z_3 \in [1.8, 2.0].$$

(a) Mostrar que o método de Newton com iterada inicial $x_0 \in [0.1, 0.3]$ converge para a raiz z_2.

(b) Utilizar o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz z_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

Resolução:

(a) Condições suficientes de convergência $\forall x_0 \in I_2 = [0.1, 0.3] = [a, b]$:

(o) $p \in C^2(I_2)$

(i) $\left.\begin{array}{l} p(a) = 0.601 \\ p(b) = -0.173 \end{array}\right\} \Rightarrow p(a)p(b) < 0$

(ii) $p'(x) = 3x^2 - 4 < 0, \quad \forall x \in I_2$

(iii) $p''(x) = 6x > 0, \quad \forall x \in I_2$

(iv) $\left|\dfrac{p(a)}{p'(a)}\right| = \dfrac{0.601}{3.97} = 0.151 < 0.2 = b - a$

$\left|\dfrac{p(b)}{p'(b)}\right| = \dfrac{0.173}{3.73} = 0.0464 < 0.2 = b - a$

(b) $x_{m+1} = g(x_m), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \in I_2, \qquad g(x) = x - \dfrac{p(x)}{p'(x)}$

$|e_m| \leq K\,|e_{m-1}|^2 =: B_m, \quad m \geq 1$

$$K = \frac{\max_{x\in I_2} |p''(x)|}{2\min_{x\in I_2} |p'(x)|} = \frac{|p''(b)|}{2|p'(b)|} = \frac{1.8}{2 \times 3.73} = 0.241287 \approx 0.242$$

$x_0 = \dfrac{a+b}{2} = 0.2, \qquad |e_0| \leq \dfrac{b-a}{2} = 0.1$

$K|e_0| \leq 0.0242 < 1$

m	x_m	B_m
0	0.2	
1	0.2536082474226804	0.242×10^{-2}
2	0.2541016396741136	0.142×10^{-5}
3	0.2541916883650519	0.486×10^{-12}

$z_2 \approx x_3 = 0.254191688365$

Note-se que $z_2 = 0.2541916883650524\ldots, \qquad |z_2 - x_3| = 0.5 \times 10^{-15}$

Definição. Diz-se que uma função f tem um zero z de multiplicidade $\mu > 1$ se existir uma função h contínua em z tal que $h(z) \neq 0$ e que

$$f(x) = (x - z)^\mu h(x).$$

Nota. Se $h \in C^{\mu}(V_z)$ então

$$f(z) = f'(z) = \cdots = f^{(\mu-1)}(z) = 0, \qquad f^{(\mu)}(z) \neq 0.$$

Proposição (da convergência local, linear). Seja $f \in C^2(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, zero de multiplicidade $\mu > 1$ de f. Então, para qualquer x_0 suficientemente próximo de z, o método de Newton converge para z e

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{z - x_m} = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Dem.: $(\cdots)$

Definição. O método de Newton μ-modificado para um zero de multiplicidade $\mu > 1$ de f é definido por

$$x_{m+1} = x_m - \mu \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad x_0 = \xi_0 \text{ dado.}$$

Proposição (da convergência local, quadrática). Seja $f \in C^3(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, zero de multiplicidade $\mu > 1$ de f. Então, para qualquer x_0 suficientemente próximo de z, o método de Newton μ-modificado converge para z e:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{z - x_{m+1}}{(z - x_m)^2} = -\frac{1}{\mu}\frac{h'(z)}{h(z)}.$$

onde h é tal que $f(x) = (x - z)^{\mu} h(x)$, $h(z) \neq 0$.

Dem.: $(\cdots)$

Nota. O método de Newton μ-modificado tem a desvantagem de exigir o conhecimento "a priori" da multiplicidade da raiz.

Método da secante

Definição. O **método da secante** é o método iterativo a dois passos da forma

$$x_{m+2} = x_{m+1} - f(x_{m+1}) \frac{x_{m+1} - x_m}{f(x_{m+1}) - f(x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x_0 = \xi_0,\ x_1 = \xi_1,\ \ \xi_0, \xi_1 \text{ dados.}$$

Nota. O método da secante pode ser interpretado geométricamente da seguinte forma: a iterada x_{m+2} é a intersecção do eixo das abcissas com a recta que passa pelos pontos $(x_m, f(x_m))$ e $(x_{m+1}, f(x_{m+1}))$, cuja equação é

$$y = f(x_{m+1}) + \frac{f(x_{m+1}) - f(x_m)}{x_{m+1} - x_m}(x - x_{m+1}).$$

Proposição (condições suficientes de convergência). Seja $f \in C^2(I)$, $I = [a, b]$, uma função que verifica as seguintes condições:

(1) $f(a)f(b) \leq 0$;

(2) $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in I$;

(3) $f''(x) \geq 0$ ou $f''(x) \leq 0, \ \forall x \in I$;

(4) (a) $f(x_0)f''(x) \geq 0$, e $f(x_1)f''(x) \geq 0, \ \forall x \in I, \ x_0, x_1 \in I$;

ou

(b) $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq b - a$ e $\left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right| \leq b - a.$

Então o método da secante converge para a única solução z de $f(x) = 0$ em I.

Proposição (da convergência local). Seja $f \in C^2(V_z)$, onde V_z é uma vizinhança de z, raiz de f, tal que $|f'(z)| \neq 0$. Então, para quaisquer x_0 e x_1 suficientemente próximos de z, o método da secante converge para z. Além disso:

(1) (Fórmula do erro)

$$z - x_{m+1} = -\frac{f''(\eta_m)}{2f'(\xi_m)}\,(z - x_m)\,(z - x_{m-1})\,, \qquad \xi_m \in]x_{m-1}; x_m[, \ \ \eta_m \in]x_{m-1}; z; x_m[$$

(2) (Estimativa do erro)

$$|z - x_{m+1}| \leq K\,|z - x_m|\,|z - x_{m-1}|\,, \qquad K = \frac{\max_{x\in I}|f''(x)|}{2\min_{x\in I}|f'(x)|},$$

ou

$$|z - x_m| \leq \frac{1}{K}\,\delta^{q_m}, \qquad m \geq 0,$$

onde $I = [z - \varepsilon, z + \varepsilon] \subset V_z$ é tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in I, \ K\varepsilon < 1, \ x_0, x_1 \in I$,

$$\delta = \max\{K|z - x_0|, K|z - x_1|\} < 1,$$

e $\{q_m\}$ é a sucessão de Fibonnaci.

(3) (Ordem de convergência)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|z - x_{m+1}|}{|z - x_m|^r} = \left|\frac{f''(z)}{2f'(z)}\right|^{r-1} =: K_\infty^{[r]}, \qquad r = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803\ldots$$

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo. Considere-se o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 4x + 1,$$

para o qual se verificou a existência de três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$ tais que

$$z_1 \in [-2.2, -2.0], \qquad z_2 \in [0.1, 0.3], \qquad z_3 \in [1.8, 2.0].$$

(a) Mostrar que o método da secante com iteradas iniciais $x_0, x_1 \in [1.8, 2.0]$ converge para a raiz z_3.

(b) Utilizar o método da secante para obter um valor aproximado da raiz z_3 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}.

Resolução:

(a) Condições suficientes de convergência $\forall x_0 \in I_3 = [1.8, 2.0] = [a, b]$:

(o) $p \in C^2(I_3)$

(i) $\left.\begin{array}{l} p(a) = -0.368 \\ p(b) = 1.00 \end{array}\right\} \Rightarrow \; p(a)p(b) < 0$

(ii) $p'(x) = 3x^2 - 4 > 0, \;\; \forall x \in I_3$

(iii) $p''(x) = 6x > 0, \;\; \forall x \in I_3$

(iv) $\left|\dfrac{p(a)}{p'(a)}\right| = 0.0643 < 0.2 = b - a$

$\left|\dfrac{p(b)}{p'(b)}\right| = 0.125 < 0.2 = b - a$

(b) $x_{m+2} = g(x_m, x_{m-1}), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad g(x, y) = \dfrac{xp(y) - yp(x)}{p(y) - p(x)}$

$$|e_m| \leq K\,|e_{m-1}||e_{m-2}| =: B_m, \quad m \geq 2$$

$$K = \frac{\max_{x \in I_3} |p''(x)|}{2 \min_{x \in I_3} |p'(x)|} = \frac{|p''(b)|}{2|p'(a)|} = \frac{12.0}{2 \times 5.72} = 1.05$$

$$|e_0| \leq b - a = 0.2, \qquad |e_1| \leq b - a = 0.2$$

$$K|e_0| \leq 0.21 < 1, \qquad K|e_1| \leq 0.21 < 1$$

m	x_m	B_m
0	1.8	
1	2.0	
2	1.853801169590643	0.420×10^{-1}
3	1.860025945055839	0.882×10^{-2}
4	1.860810653297940	0.389×10^{-3}
5	1.860805849838245	0.360×10^{-5}
6	1.860805853111690	0.147×10^{-8}

$z_3 \approx x_6 = 1.86080585$

Note-se que $z_3 = 1.860805853111703\ldots$, $\quad |z_3 - x_6| = 0.140 \times 10^{-13}$

Nota (comparação do método de Newton com o método da secante). Vimos que;

- O método de Newton:
  (i) tem ordem de convergência 2;
  (ii) envolve o cálculo de f e f' em cada iteração.
- O método da secante:
  (i) tem ordem de convergência $r \approx 1.618$;
  (ii) envolve apenas o cálculo de f em cada iteração.

Pode mostrar-se que o tempo de cálculo dos dois métodos, para um mesmo erro, é o mesmo se

$$t_{f'} \approx 0.44 t_f$$

ou, dito de outra maneira, o método de Newton será mais eficaz se

$$t_{f'} < 0.44 t_f.$$