MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 2. Métodos Iterativos

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano de
Mestrados Integrados e Licenciaturas em Ciências de Engenharia
do Instituto Superior Técnico

2. MÉTODOS ITERATIVOS

Normas vectoriais

Definição. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Uma função $N : E \to \mathbb{R}$ diz-se uma **norma** se verificar as seguintes condições:

(1) $N(x) \geq 0, \;\; \forall x \in E; \;\; N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x), \;\; \forall x \in E, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

(3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \;\; \forall x, y \in E.$ (Desigualdade triangular)

Notação. $\|x\|_N = N(x)$

Exemplo. Normas em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(1) Norma da soma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) Norma Euclidiana

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

(3) Norma do máximo

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(4) Norma-p, $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Nota. A desigualdade triangular para a norma-p,

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \forall p \geq 1,$$

é conhecida por **desigualdade de Minkowski**.

Definição. Um espaço vectorial no qual está definida uma norma diz-se um **espaço normado**.

Definição. Sejam E um espaço normado com a norma N e X um subconjunto de E. Então $f : E \to \mathbb{R}$ diz-se uma **função contínua** em X se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in X : N(x-y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposição. Uma norma N num espaço vectorial E é uma função contínua de E em $\mathbb{R}$.

Definição. Diz-se que duas normas N e M num espaço vectorial E são **equivalentes** se existirem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 M(x) \leq N(x) \leq C_2 M(x), \qquad \forall x \in E.$$

Teorema. Todas as normas num espaço vectorial de dimensão finita são equivalentes.

Exemplo. Sendo $x \in \mathbb{C}^n$:

(1) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

(2) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(3) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

Com efeito:

(1) $\|x\|_\infty = |x_m| \leq \sum_i |x_i| = \|x\|_1 \leq n|x_m| = n\|x\|_\infty$

(2) $\|x\|_\infty^2 = |x_m|^2 \leq \sum_i |x_i|^2 = \|x\|_2^2 \leq n|x_m|^2 = n\|x\|_\infty^2$

(3) $\|x\|_2^2 = \sum_i |x_i|^2 \leq \left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2$

$\|x\|_1 = \sum_i 1 \cdot |x_i| \leq \left(\sum_i 1^2\right)^{1/2} \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_2$

(onde se usou a desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Definição. Sendo $x, y \in \mathbb{C}^n$ define-se o seu **produto interno** $< x, y >$ por

$$< x, y >= y^* x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Proposição. Sendo $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

(1) $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$;

(2) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$; $\qquad < x, \alpha y >= \bar{\alpha} < x, y >$;

(3) $< x, y >= \overline{< y, x >}$;

(4) $< x, x >\geq 0$; $\qquad < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(5) $\|x\|_2 = (< x, x >)^{1/2}$;

(6) $| < x, y > | \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, verificando-se a igualdade se e só se $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
(**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**)

(7) $< Ax, y > = < x, A^* y >$, onde A^* designa a matrix conjugada transposta de A.

Nota. Designaremos o espaço de matrizes quadradas de ordem n por $\mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}^n(\mathbb{C})$, consoante os elementos das matrizes sejam reais ou complexos.

Erro, erro absoluto, erro relativo ($\tilde{x} \approx x \in E$)

Definição. Seja E um espaço normado com norma $\|\cdot\|$ e $\tilde{x}$ o valor aproximado de $x \in E$. Definem-se:

Erro de $\tilde{x}$ em relação a x: $e_{\tilde{x}} = x - \tilde{x}$

Erro absoluto de $\tilde{x}$ em relação a x: $\|e_{\tilde{x}}\|$

Erro relativo de $\tilde{x}$ em relação a $x \neq 0$: $\delta_{\tilde{x}} = \dfrac{e_{\tilde{x}}}{\|x\|}$, ou $\|\delta_{\tilde{x}}\| = \dfrac{\|e_{\tilde{x}}\|}{\|x\|}$

(Percentagem de erro: $100\|\delta_{\tilde{x}}\|(\%)$)

Nota. Os erros dependem da norma utilizada.

Exemplo. Sendo $x = (\pi, \sqrt{2}, 1)$, $\tilde{x} = (3.14, 1.4, 1.01)$:

$$x - \tilde{x} = (0.00159265, \quad 0.0142136, \quad -0.01)$$

$$\|e_{\tilde{x}}\|_1 = 0.0258063, \qquad \|e_{\tilde{x}}\|_2 = 0.0174517, \qquad \|e_{\tilde{x}}\|_\infty = 0.0142136.$$

Convergência e ordem de convergência

Definição. Seja $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de um espaço normado E. Diz-se que esta sucessão **converge** para um certo $x \in E$ segundo a norma N, escrevendo-se simbolicamente $x^{(k)} \xrightarrow{N} x$, se e só se

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)} - x\|_N = 0.$$

Nota. Do teorema anterior sobre a equivalência de todas as normas num espaço de dimensão finita resulta que se uma dada sucessão $\{x^{(k)}\}$ converge para um certo $x \in E$ segundo uma certa norma N, então também converge para x segundo qualquer outra norma M. Esta observação permite-nos, enquanto estivermos a tratar de espaços de dimensão finita, falar de convergência sem nos referirmos a nenhuma norma em especial. Por isso dizemos simplesmente que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ converge para x e escrevemos simbolicamente $x^{(k)} \to x$.

Nota. Sempre que não haja risco de confusão designaremos, por simplicidade de notação, o termo geral de uma sucessão por x_n em vez de por $x^{(n)}$.

Definição. Seja x_n uma sucessão convergente para x e seja $e_n = x - x_n \neq 0$. Para $r \geq 1$ consideremos a sucessão

$$K_n^{[r]} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}.$$

(1) Se existir n_0 tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad K_n^{[r]} \leq K^+ < M_r,$$

onde $M_1 = 1$ e $M_r = +\infty, \quad r > 1$, diz-se que a sucessão tem **ordem de convergência (o.c.) maior ou igual a** r.

(2) Se além disso

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < K^- \leq K_n^{[r]},$$

diz-se que a sucessão tem **o.c.** r.

(3) Se existir

$$K_\infty^{[r]} = \lim_{n\to\infty} K_n^{[r]},$$

este valor é designado por **coeficiente assimptótico de convergência de ordem** r, verificando-se então:

$K_\infty^{[r]} < M_r$:	a sucessão tem o.c. maior ou igual a r;
$0 < K_\infty^{[r]} < M_r$:	a sucessão tem o.c. r; se $r = 1$ a convergência diz-se linear; se $r = 2$ a convergência diz-se quadrática;
$K_\infty^{[r]} = 0, \ \forall r > 1$:	a sucessão tem convergência exponencial;
$K_\infty^{[1]} = 0$:	a sucessão tem convergência supralinear;
$K_\infty^{[1]} = 1$:	a sucessão tem convergência logarítmica ou infralinear.

Nota. Se a sucessão tem o.c. r, então tem o.c. maior ou igual a q, $\quad 0 < q < r$. Com efeito, como $\lim_{n\to\infty} \|e^{(n)}\|^{r-q} = 0$, tem-se

$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^q} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}\|e_n\|^{r-q} \to K_\infty^{[r]} \times 0 = 0.$$

Por outro lado, se a sucessão tem o.c. r, então não pode ter o.c. superior a r. Com efeito, sendo $q > p$, como $\lim_{n\to\infty} \|e_n\|^{r-q} = \infty$ e $K_\infty^{[r]} \neq 0$, tem-se

$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^q} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}\|e_n\|^{r-q} \to K_\infty^{[r]} \times \infty = \infty.$$

Exemplo. As quatro sucessões seguintes convergem para 1 com a ordem de convergência indicada $(a, b \in \mathbb{Z},\ \ a, b \geq 2)$:

$$(1)\ \ u_n = 1 + \frac{1}{n^a}: \quad \text{convergência logarítmica ou infralinear}$$

$$(2)\ \ v_n = 1 + \frac{1}{a^n}: \quad \text{convergência linear}$$

$$(3)\ \ x_n = 1 + \frac{1}{a^{b^n}}: \quad \text{convergência (supralinear) de ordem } b$$

$$(4)\ y_n = 1 + \frac{1}{a^{b^{n^2}}}: \quad \text{convergência exponencial}$$

Com efeito:

$$\frac{|1 - u_{n+1}|}{|1 - u_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^a \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 1$$

$$\frac{|1 - v_{n+1}|}{|1 - v_n|} = \frac{1}{a} < 1$$

$$\frac{|1 - x_{n+1}|}{|1 - x_n|^r} = a^{b^n(r-b)} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} 0, & r < b \\ 1, & r = b \\ \infty, & b < r \end{cases}$$

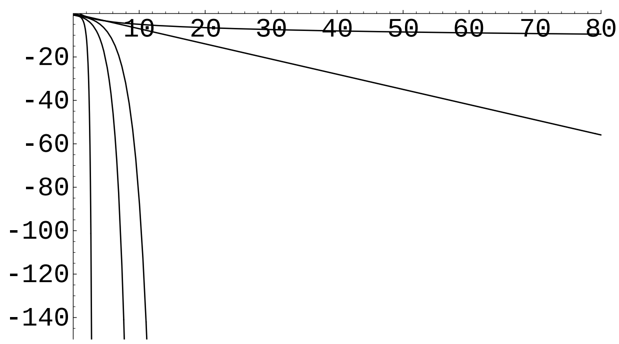
$$\frac{|1 - y_{n+1}|}{|1 - y_n|^r} = a^{b^{n^2}(r - b^{2n+1})} \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

Gráficos de $\log_{10} |e_n|,\ \ e_n = 1 - u_n$, em função de n para

$$(1)\ u_n = 1 + n^{-5}; \qquad (2)\ u_n = 1 + 5^{-n};$$

$$(3)'\ u_n = 1 + 5^{-r^n},\ \ r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \qquad (3)\ u_n = 1 + 5^{-2^n}; \qquad (4)\ u_n = 1 + 5^{-2^{n^2}},$$

no sentido dos ponteiros do relógio.



Exemplo. Consideremos a sucessão

$$w_n = 1 + \frac{2 + (-1)^n}{4^n}.$$

Uma vez que

$$K_n^{[1]} = \frac{|1-w_{n+1}|}{|1-w_n|} = \frac{1}{4}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}, & n \text{ par}, \\ \dfrac{3}{4}, & n \text{ ímpar}, \end{cases}$$

não existe $K_\infty^{[1]}$. No entanto, como podemos escrever,

$$0 < \frac{1}{12} \leq K_n^{[1]} \leq \frac{3}{4} < 1,$$

concluímos que a sucessão tem convergência linear.

Métodos iterativos

Definição. Seja X um subconjunto de um espaço normado E e seja $p \geq 1$ um inteiro. Chama-se **método iterativo a p passos** em E à aplicação $\Psi : X^p \to E^{\mathbb{N}}$ que a cada $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \in X^p$ associa uma sucessão $\{x^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tal que

$$\begin{cases} x^{(i)} = \xi_i, & \forall i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \\ x^{(m+p)} = \phi\left(x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots, x^{(m+p-1)}\right), & \forall m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

onde $\phi : X^p \to X$ é uma função conhecida. Diz-se que ϕ é a **função iteradora**, $x^{(m+p)}$ é a **iterada** de ordem $m+p$ e $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1})$ são os **valores iniciais**.

Definição. Diz-se que o método iterativo Ψ a p passos é **convergente** para $x \in E$, num certo domínio $D \subset X^p$, se para quaisquer valores iniciais $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \in D$ se verificar que $x^{(m)} \to x$.

Definição. Diz-se que o método iterativo é de ordem r se a sucessão gerada pelo método tem ordem de convergência r.

Exemplo. Os seguintes métodos iterativos são utilizados na determinação de zeros de funções $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(1) Método do ponto fixo ($f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x)$):

$$\begin{cases} x_{m+1} = g(x_m), & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I \end{cases}$$

$$\Psi : I \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \phi : I \to I, \qquad \phi(x) = g(x)$$

(2) Método de Newton:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m - \dfrac{f(x_m)}{f'(x_m)}, & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I \end{cases}$$

$$\Psi : I \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \phi : I \to I, \qquad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(3) Método da secante:

$$\begin{cases} x_{m+2} = x_{m+1} - f(x_{m+1}) \dfrac{x_{m+1} - x_m}{f(x_{m+1}) - f(x_m)}, & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I, \;\; x_1 = \xi_1 \in I \end{cases}$$

$$\Psi : I^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \phi : I^2 \to I, \qquad \phi(x, y) = \frac{x f(y) - y f(x)}{f(y) - f(x)}$$

Os métodos têm o.c. 1, 2 e $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, respectivamente.

O seguinte método iterativo utiliza-se na resolução de sistemas lineares, $Ax = b$, $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} x_{m+1} = C x_m + w, & m \in \mathbb{N}, \\ C = I - M^{-1}A, & w = M^{-1}b, \qquad \det M \neq 0, \\ x_0 = \xi_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

$$\Psi : \mathbb{R}^d \to (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \qquad \phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \phi(x) = Cx + w$$

O método tem o.c. 1.

Equações às diferenças

Definição. Por uma **equação às diferenças de ordem** $p \in \mathbb{N}_1$ linear e de coeficentes constantes, entende-se uma equação da forma

$$x_{m+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_{m+i} = 0,$$

onde $m \in \mathbb{N}, x_m \in \mathbb{C}$ e os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ são números complexos.

Definição. O **problema de valor inicial** para a equação às diferenças consiste em determinar a solução da equação que satisfaça às condições iniciais

$$x_i = \xi_i, \qquad \forall i \in \{0, \ldots, p-1\},$$

onde $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ são dados. Este problema constitui um método iterativo a p passos de acordo com a definição apresentada anteriormente.

Exemplo. A sucessão gerada pelo método iterativo

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1, \end{cases}$$

é conhecida como **sucessão de Fibonacci.**

Exemplo. Solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_{m+2} + a_1 x_{m+1} + a_0 x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = \xi_0, \quad x_1 = \xi_1. \end{cases}$$

Sendo r_1, r_2 os zeros do polinómio $P(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ tem-se:

(1) $r_1 \neq r_2$

$$x_m = c_1 r_1^m + c_2 r_2^m, \qquad c_1 = \frac{r_2 \xi_0 - \xi_1}{r_2 - r_1}, \qquad c_2 = \frac{-r_1 \xi_0 + \xi_1}{r_2 - r_1}$$

(2) $r_1 = r_2$

$$x_m = r_1^m (c_1 + c_2 m), \qquad c_1 = \xi_0, \qquad c_2 = \frac{\xi_1}{r_1} - \xi_0$$

Este resultado pode obter-se escrevendo a solução (1) na forma

$$x_m = \xi_0 r_1^m + (\xi_1 - r_1 \xi_0) \, \frac{r_2^m - r_1^m}{r_2 - r_1},$$

e fazendo $r_2 \to r_1$.

Proposição. Considere-se a equação às diferenças de ordem p

$$x_{m+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_{m+i} = 0.$$

Seja

$$P(z) = z^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i,$$

o *polinómio característico* da equação. Então:

(1) (i) Se P tem p raízes distintas $z_1, z_2, \ldots, z_p$, a solução geral da equação é

$$x_m = \sum_{i=1}^{p} C_{i0} z_i^m.$$

(ii) Se P tem q raízes distintas, $1 \leq q < p$, $z_1, \ldots, z_q$, com multiplicidades $\mu_1, \ldots, \mu_q$, respectivamente, verificando a identidade $\mu_1 + \ldots + \mu_q = p$, a solução geral da equação é

$$x_m = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=0}^{\mu_i - 1} C_{ij} \, m^j \right) z_i^m.$$

Em ambos os casos os C_{ij} são constantes arbitrárias.

(2) O problema de valor inicial tem uma solução única, com as constantes C_{ij} fixadas pelas condições iniciais.

Exemplo. A sucessão de Fibonacci tem o termo geral

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right].$$

Com efeito:

Polinómio característico: $P(z) = z^2 - z - 1$

Raízes de P: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Solução geral: $x_m = C_1 r_1^m + C_2 r_2^m$

Condições iniciais: $\begin{cases} 1 = x_0 = C_1 + C_2 \\ 1 = x_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{r_1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = -\dfrac{r_2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Exemplo. **Instabilidade numérica** ilustrada pelo método iterativo a dois passos definido por

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\, x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\, x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

cuja solução exacta é

$$x_m = \left(\frac{1}{3}\right)^m.$$

Na página seguinte apresentam-se os resultados do cálculo numérico da sucessão $\tilde{x}_m$ gerada pelo método iterativo em precisão simples e dupla.

Os resultados podem ser interpretados a partir da solução exacta do problema de valor inicial perturbado,

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\, x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\, x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = 1 + \varepsilon_0, \quad x_1 = \dfrac{1}{3} + \varepsilon_1, \end{cases}$$

onde $|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1| \ll 1$:

$$x_m = \left[1 + \frac{3}{11}\,(4\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\right]\left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{11}\,(3\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(4)^m.$$

Com efeito:

Polinómio característico: $P(z) = z^2 - \frac{13}{3}z + \frac{4}{3}$

Raízes de P: $r_1 = 4, \qquad r_2 = \frac{1}{3}$

Solução geral: $x_m = C_1 r_1^m + C_2 r_2^m$

Condições iniciais: $\begin{cases} 1 + \varepsilon_0 = x_0 = C_1 + C_2 \\ \frac{1}{3} + \varepsilon_1 = x_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{11}\left(3\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right) \\ C_2 = 1 + \frac{3}{11}\left(4\varepsilon_0 - \varepsilon_1\right) \end{cases}$

Cálculo da sucessão $\t{x}_m$ em precisão simples:

m	$\t{x}_m$	x_m	$1 - \t{x}_m/x_m$
0	1.	1.	0.
1	0.333333343	0.333333343	0.
2	0.111111164	0.111111119	-4.02331324E-07
3	0.0370372571	0.037037041	-5.83380415E-06
4	0.0123465639	0.012345681	-7.15143833E-05
5	0.00411876757	0.00411522714	-0.000860322558
6	0.00138590776	0.00137174246	-0.010326501
7	0.000513910258	0.000457247486	-0.123921447
8	0.000379067467	0.000152415843	-1.48706079
9	0.000957412063	5.08052835E-05	-17.8447342
10	0.00364336255	1.69350951E-05	-214.136826
11	0.0145113552	5.64503171E-06	-2569.64185
12	0.0580247231	1.88167735E-06	-30835.7012
13	0.232092008	6.27225802E-07	-370028.438
14	0.928365767	2.09075282E-07	-4440341.
15	3.71346235	6.96917581E-08	-53284096.

Cálculo da sucessão $\t{x}_m$ em precisão dupla:

m	$\t{x}_m$	x_m	$1 - \t{x}_m/x_m$
0	1.	1.	0.
1	0.333333333	0.333333333	9.99200722E-15
2	0.111111111	0.111111111	1.30770395E-13
3	0.037037037	0.037037037	1.58029839E-12
4	0.012345679	0.012345679	1.89748217E-11
5	0.00411522634	0.00411522634	2.27709242E-10
6	0.00137174211	0.00137174211	2.73252339E-09
7	0.000457247356	0.000457247371	3.27902927E-08
8	0.00015241573	0.00015241579	3.93483525E-07
9	5.08050235E-05	5.08052634E-05	4.72180232E-06
10	1.69341282E-05	1.69350878E-05	5.66616278E-05
11	5.64119099E-06	5.64502927E-06	0.000679939534
12	1.86632331E-06	1.88167642E-06	0.00815927441
13	5.65813017E-07	6.27225474E-07	0.0979112929
14	-3.65746704E-08	2.09075158E-07	1.17493551
15	-9.12907595E-07	6.96917194E-08	14.0992262