MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 1º

TCCC – Exercícios

[**3a**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação e tal que $f'(z) \neq 0$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton**.

[**3b**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação e tal que $f'(z) \neq 0$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método da secante**.

[**3c**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação e tal que $f'(z) \neq 0$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Steffensen**. (Ver Bibliografia)

[**3d**] Considere uma equação $f(x) = 0$ onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z da equação e tal que $f'(z) \neq 0$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Muller**. (Ver Bibliografia)

[**4a**] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Jacobi modificado**.

[**4b**] Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^d(\mathbb{R})$, A não singular, e $b \in \mathbb{R}^d$ são dados, $d \geq 2$. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução única z deste sistema usando o **método de Gauss-Seidel modificado**.

[**5a**] Considere um sistema de equações $f(x) = 0$ onde $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, é uma função contínuamente diferenciável numa vizinhança de uma solução z do sistema e tal que a sua matriz Jacobiana é invertível em z. Escreva um programa para calcular um valor aproximado da solução z usando o **método de Newton generalizado**. Use o **método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot** para resolver o sistema linear que determina a diferença de duas iteradas sucessivas do método de Newton.

[6a] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos.

(i) Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Lagrange**.

(ii) Escreva um programa para obter o **polinómio interpolador** de f nos pontos dados usando a **fórmula interpoladora de Newton**.

[6b] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter a **função spline cúbica interpoladora natural** de f nos pontos dados. Utilize o **método de eliminação de Gauss** para resolver o sistema linear com matriz tridiagonal que ocorre na determinação da spline. (Ver Bibliografia)

[7a] Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_N$ os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Escreva um programa para obter o polinómio de grau menor ou igual a n, sendo $n \leq N$, que constitui a **melhor aproximação mínimos quadrados discreta** de f nos pontos dados. Utilize o **método de eliminação de Gauss** para resolver o sistema normal.

[8a] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(i) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Simpson composta** com M sub-intervalos, onde M é um número par.

(ii) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M sub-intervalos e 2 nós de integração por sub-intervalo.

[8b] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(i) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Newton-Cotes de ordem 4 composta** com M sub-intervalos, onde M é um múltiplo de quatro.

(ii) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M sub-intervalos e 3 nós de integração por sub-intervalo.

[**8c**] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(i) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Newton-Cotes de ordem 6 composta** com M sub-intervalos, onde M é um múltiplo de seis.

(ii) Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Gauss-Legendre composta** com M sub-intervalos e 4 nós de integração por sub-intervalo.

[**8d**] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Gauss-Legendre** com $n+1$ nós de integração.

[**8e**] Considere o integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Escreva um programa para calcular um valor aproximado do integral $I(f)$ pela **Fórmula de Simpson composta adaptativa**. (Ver Bibliografia)

[**10a**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Euler modificado**.

[**10b**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Heun**.

[**10c**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 2ª ordem**.

[**10d**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 3ª ordem**.

[**10e**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Heun de 3ª ordem**.

[**10f**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Nystrom de 3ª ordem**.

[**10g**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem**.

[10h] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Gill de 4ª ordem**.

[10i] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Fehlberg de 4ª ordem**.

[10j] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à segunda varíável e $(x_0, Y_0) \in D$. Escreva um programa para calcular uma aproximação da solução do problema (P) pelo **método de Runge-Kutta-Fehlberg adaptativo**. (Ver Bibliografia)

Bibliografia

- Método de Steffensen: Alves, 55-57; Burden & Faires, 84; Kincaid & Cheney, 90; Pina, 190-191.
- Método de Muller: Atkinson, 73-76; Burden & Faires, 92-95; Pina, 181-183.
- Spline cúbica: Burden & Faires, 137-157; Kincaid & Cheney, 349-361; Pina, 77-87.
- Método de Simpson adaptativo: Atkinson, 300-305; Burden & Faires, 212-218; Carpentier, 190-193; Pina, 142-145.
- Método de Runge-Kutta-Fehlberg adaptativo: Atkinson, 429-431; Burden & Faires, 283-289; Kincaid & Cheney, 544-546; Pina, 529-532.

◇ ALVES, C., Fundamentos de Análise Numérica I.
◇ ATKINSON, K., An Introduction to Numerical Analysis.
◇ BURDEN, R.L. & FAIRES, J.D., Numerical Analysis, 5ª edição.
◇ CARPENTIER, M., Análise Numérica (Teoria).
◇ KINCAID, D., & CHENEY, W., Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing, 3ª edição.
◇ PINA, H., Métodos Numéricos.