

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 1^o

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

[7.1] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine de entre os polinómios $p \in \mathcal{P}_1$ aquele que minimiza a *distância*

$$d(f, p) = \left[\sum_{i=0}^3 [f(x_i) - p(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

(b) Idem para $p \in \mathcal{P}_2$.

(c) Idem para $p \in \mathcal{P}_3$.

(d) Determine em cada um dos casos o valor mínimo da *distância* $d(f, p)$.

Nota: \mathcal{P}_m designa o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a $m \in \mathbb{N}$.

[7.2] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

(a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

(b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

(c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M, \forall x \in [1.2, 1.5]$, obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.

Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

(d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

[7.3] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = 6, \quad f(2) = 15.$$

Obtenha a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = ax + b,$$

que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^3 (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6,$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

[7.4] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.5	1.0	0.5	0.0

Determine de entre os polinômios trigonométricos da forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1 \cos(\pi x) + a_2 \cos(2\pi x),$$

aquele que minimiza a *distância*

$$d(f, \phi) = \left[\sum_{i=0}^4 [f(x_i) - \phi(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

[7.5] Determine a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x},$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

[7.6] Considere os pontos

$$(-5, -1), \quad (-3, 0), \quad (-1, -1), \quad (1, 2).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2,$$

que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.

(c) O mesmo que em (a) para

$$g(x) = \frac{a + bx^2}{x + 1}.$$

[7.7] Considere a aproximação por mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 2),$$

por uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3,$$

com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(\pi x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Mostre que a matriz do sistema normal não é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k .

[7.8] Considere os 6 pontos

$$(-1, 7), \quad (0, 6), \quad (1, 6), \quad (2, 4), \quad (4, 3), \quad (5, 1).$$

(a) Determine a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a - x + bx^2,$$

cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) O mesmo que em (a) usando

$$g(x) = ae^{bx} - \frac{x^2}{4},$$

e uma transformação de variáveis.

[7.9] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A , B pelo método dos mínimos quadrados.

Sugestão: Poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis.

[7.10] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	5.43656	2.0	0.735759	0.270671

Determine de entre as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\phi(x) = \frac{1}{ax + b}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/a\},$$

aquela que minimiza a *distância*

$$d(f, \phi) = \left[\sum_{i=0}^3 [f(x_i) - \phi(x_i)]^2 \right]^{1/2}.$$

[7.11] Considere Q uma matriz simétrica definida positiva e o produto interno definido em \mathbb{R}^N por

$$\langle v, w \rangle_Q = v^\top Q w.$$

Supondo que queremos aproximar uma lista de pontos cujas ordenadas estão no vector $y \in \mathbb{R}^N$ por uma função

$$g = a_1 \phi_1 + \dots + a_m \phi_m,$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_m são funções linearmente independentes (para a lista de abcissas), mostre que o sistema a resolver pode escrever-se na forma

$$X^\top Q X a = X^\top Q y,$$

onde X é uma matriz $N \times m$ e $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]^\top$.

[7.12] (a) Determine qual a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = a + cx^2,$$

que melhor aproxima $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$ segundo o método dos mínimos quadrados.

(b) Qual o erro no ponto $x = 1$, e qual o maior erro $|f(x) - g(x)|$ nesse intervalo.

[7.13] Demonstre a seguinte propriedade dos polinómios de Chebyshev $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0 \end{cases}.$$

[7.14] Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a 2 a *melhor aproximação mínimos quadrados* da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3$, relativamente aos seguintes produtos internos:

(a)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x) dx, \quad \forall g, h \in C([a, b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Legendre.

(b)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \forall g, h \in C([a, b]).$$

Sugestão: utilize os polinómios de Chebyshev.

(c)

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x)h(x) dx, \quad \forall g, h \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}),$$

onde $\mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ designa o conjunto das funções contínuas para as quais existe o integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [g(x)]^2 dx$.

Sugestão: utilize os polinómios de Hermite.

[7.15] Considere a função

$$f(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1].$$

Determine o polinómio $q_2^* \in \mathcal{P}_2[-1, 1]$ que minimiza

$$\int_{-1}^1 \frac{[f(x) - q(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad q \in \mathcal{P}_2[-1, 1].$$

[7.16] Pretende-se obter a função

$$g(x) = a + b(2x^2 - 1) + c(4x^3 - 3x),$$

que melhor aproxima $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, no intervalo $] - 1, 1[$, de forma a minimizar a distância dada por

$$d(f, g) = \left\{ \int_{-1}^1 \frac{[f(x) - g(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right\}^{1/2}.$$

(a) Determine os valores a, b, c que melhor efectuem essa aproximação.

(b) Indique qual o valor mínimo para $d(f, g)$.

[7.17] Considere o espaço linear $C^1([a, b])$ e o operador definido por

$$L(f) = \left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 dx \right\}^{1/2}, \quad f \in C^1([a, b]).$$

(a) Sabendo que

$$L(f + g) \leq L(f) + L(g), \quad \forall f, g \in C^1([a, b]),$$

prove que L define um seminorma (que não é norma) em $C^1([a, b])$.

(b) Recorrendo à teoria da melhor aproximação e usando L , mostre que existem constantes reais $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ tais que

$$\int_a^b (\cos x + \bar{\alpha}x + \bar{\beta})^2 dx \leq \int_a^b (\cos x + \alpha x + \beta)^2 dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$