

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 1^o

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

[6.1] Considere a matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

[6.2] Sejam x_1, x_2, \dots, x_M valores reais distintos e f_1, f_2, \dots, f_M os correspondentes valores de uma função f nesses pontos. Prove que existe uma única função F_M da forma

$$F_M(x) = \sum_{j=1}^M c_j e^{jx},$$

para a qual se tem $F_M(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, M$.

[6.3] Sejam x_0, x_1, \dots, x_n pontos distintos de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e sejam l_0, l_1, \dots, l_n os polinómios de Lagrange construídos nesses pontos. Mostre que

$$\sum_{j=0}^n x_j^m l_j(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, n]$$

[6.4] Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) - 1,$$

onde l_0, l_1, \dots, l_n são os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1, \dots, x_n . Prove que:

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x .

[6.5] Seja f um polinómio de grau m e sejam x, x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 2$ pontos distintos em $[a, b]$. Deduza que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \begin{cases} p_{m-n-1}^*(x), & n < m - 1 \\ a_m, & n = m - 1 \\ 0, & n > m - 1 \end{cases}$$

onde p_{m-n-1}^* designa um polinómio de grau $m - n - 1$ e a_m é o coeficiente do termo em x^m de f .

[6.6] Na tabela seguinte são apresentados valores de uma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$:

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

(a) Obtenha o polinómio p_2 que interpola f nos três pontos tabelados, usando a fórmula de Lagrange.

(b) O mesmo que na alínea (b), mas usando a fórmula de Newton.

(c) Calcule $p_2(1.3)$ e obtenha um majorante do erro $f(1.3) - p_2(1.3)$, sabendo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

[6.7] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_i	-1	1	4
$f(x_i)$	2	-2	-8

Supondo que f é um polinómio e que

$$f[-1, 1, 2] = 4, \quad f[-1, 1, 2, 4, x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\},$$

determine a forma de $f(x)$.

[6.8] Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

[6.9] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0, 1])$ e que $\max_{x \in [0, 1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

[6.10] Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador

$$p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2.$$

(a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f .

[6.11] Seja $f \in C^3[0, 1]$ uma função real.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio p de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

(b) Supondo que $|f'''(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$, mostre que

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

[6.12] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f .

[6.13] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f ,

x_i	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-17	5	-5	c

que se sabe ser um polinómio da forma

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5,$$

com a_1, a_2 reais. Que relação existe entre o polinómio interpolador de f nos 3 primeiros pontos e a função f ? Determine o valor de $f(4)$.

[6.14] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a) Determine o polinómio interpolador de f , p_3 , nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(b) Determine o polinómio interpolador de f , p_3 , nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(c) Mostre que

$$\max_{x \in [-1, 2]} |x(x-2)(x^2-1)| = 1.$$

Sugestão: Introduza a mudança de variável $x = \theta + \frac{1}{2}$.

(d) Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 25$, $\forall x \in [-1, 2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - p_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1, 2]$.

(e) Sabendo que $f[1, 2, 3] = 25$ determine o polinómio interpolador de f , p_4 , nos pontos $-1, 0, 1, 2, 3$.

(f) Sabendo que f é um polinómio de grau 5 com quinta derivada positiva utilize toda a informação disponível para obter a sua forma.

[6.15] Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual,

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

[6.16] Sabendo que $f^{(n+1)}([a, b]) \subset [a, b]$, mostre que o erro de interpolação verifica, para qualquer $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\}e^{|b-a|}.$$

[6.17] Suponha que os valores de f calculados nos nós x_0, \dots, x_n estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n$.

Considere p_n o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e \tilde{p}_n o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

(a) Mostre que se $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$, então

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon,$$

onde $C = (n + 1) \max_k \max_{x \in [x_0, x_n]} |l_k(x)|$.

(b) No caso de nós igualmente espaçados, e $n = 2$, obtenha $C = \frac{5}{4}$.

[6.18] Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

[6.19] Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre um valor aproximado para a raiz de f usando interpolação inversa.

[6.20] Seja $f \in C^1([a, b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ e $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$; logo existe um único $z \in]a, b[$ tal que $f(z) = 0$.

(a) Sejam x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 1$ pontos distintos de $[a, b]$ e sejam y_0, y_1, \dots, y_n os valores de f nesses pontos, isto é, $y_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Escreva uma expressão para o polinómio $q_n \in \mathcal{P}_n$ que interpola f^{-1} nos nós y_0, y_1, \dots, y_n .

(b) Notando que $z = f^{-1}(0)$, utilize o polinómio q_3 e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) := e^{-x} - x = 0.$$

x_i	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_i}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

[6.21] Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n + 1$ nós x_0, x_1, \dots, x_n , igualmente espaçados do intervalo $[a, b]$ e tais que $x_0 = a$ e $x_n = b$.

(a) Mostre que se existirem constantes positivas c e M tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$. Verifique que este resultado se aplica à função $f(x) = e^{3x}$.

(b) Mostre que se existirem constantes positivas c e M , $M(b - a) < e$, tais que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq cM^n(n + 1)!$, então também $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

[6.22] Seja f uma função indefinidamente diferenciável para $x \geq 0$ e tal que $|f^{(m)}(x)| \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e para todo o $m = 0, 1, 2, \dots$. Seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{2}$. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$ para cada $x \geq 0$.

[6.23] Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - i)$$

no intervalo $[0, n]$ para diferentes valores de n . Verifique que

$$\max_{t \in [0, n]} |\psi_{n+1}(t)| < n!$$

[6.24] Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad g(x) = e^x + e^{-x}.$$

(a) Determine os polinómios interpoladores de f nos pontos

$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f .

(b) Determine os polinómios interpoladores de g nos mesmos pontos da alínea (a) para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função g .

(c) Determine os polinómios interpoladores de f nos nós de Chebyshev,

$$x_k = -\cos\left(\frac{2k + 1}{2n + 2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

para $n = 4$ e $n = 8$. Compare graficamente os polinómios interpoladores com a função f .

[6.25] Pretende-se interpolar uma função f no intervalo $[-2, 3]$ por um polinómio de grau 5.

(a) Quais os nós que deve considerar para que o erro do polinómio interpolador seja o menor possível nesse intervalo?

(b) Determine a função interpoladora correspondente a esses nós, quando

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

(c) O mesmo que em (b), considerando nós igualmente espaçados.

(d) Compare graficamente os erros obtidos em (b) e (c).

[6.26] Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x , para $x \in [0, 1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1 nos pontos x_j, x_{j+1} . Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$ seja inferior a 10^{-6} .

[6.27] Considere a expressão do método da secante para determinar um zero z de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}, \quad m = 1, 2, \dots$$

(a) Mostre que

$$z - x_{m+1} = -\frac{f[x_{m-1}, x_m, z]}{f[x_{m-1}, x_m]} (z - x_m)(z - x_{m-1}).$$

(b) Mostre que

$$z - x_{m+1} = -\frac{f''(\eta_m)}{2f'(\xi_m)} (z - x_m)(z - x_{m-1}),$$

onde $\xi_m \in]x_{m-1}; x_m[$, $\eta_m \in]x_{m-1}; z; x_m[$.