INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 1º

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

[**4.1**] Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ mostre que:

(a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2$;

(b) $\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty$;

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$;

(d) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$;

(e) $\frac{1}{n} \|A\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq n \|A\|_1$;

(f) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_2$.

[**4.2**] Mostre que a norma matricial associada à norma da soma em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

[**4.3**] Mostre que a norma matricial associada à norma do máximo em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

onde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

[**4.4**] Mostre que a norma matricial associada à norma euclidiana em $\mathbb{C}^n$ tem a forma

$$\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^* A)},$$

onde $A = \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e A^* é a matriz tranposta conjugada de A.

[**4.5**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$. Supondo que são conhecidos os valores próprios de A, determine:

(a) os valores próprios de A^{-1} (admitindo que A é invertível);

(b) os valores próprios de A^m, $m = 1, 2, \ldots$;

(c) os valores próprios de $A + cI$, onde c é uma constante.

[4.6] Sendo $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz hermiteana, isto é, uma matriz tal que $A^* = A$, mostre que $\|A\|_2 = r_\sigma(A)$.

[4.7] Seja $U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz unitária, isto é, uma matriz tal que $UU^* = U^*U = I$. Mostre que:

(a) Os valores próprios de U têm módulo um.

(b) $\|U\|_2 = 1 = r_\sigma(U)$.

[4.8] Seja $A, B, U \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$, U unitária. Mostre que:

(a) As matrizes A e U^*AU têm os mesmos valores próprios.

(b) $\|B\|_2 = \|UB\|_2 = \|BU\|_2$.

[4.9] Considere a norma de Frobenius, definida para qualquer $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ por

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Mostre que:

(a) se $A, B \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F;$$

(b) se $A, B \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|AB\|_F \leq \min\{\|A\|_2 \|B\|_F + \|A\|_F \|B\|_2\};$$

(c) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{C}^n$ então

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2;$$

(d) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F;$$

(e) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ então

$$\|A\|_2 = \|UA\|_F = \|A\|_F;$$

(f) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2},$$

onde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, são os valores próprios de A;

(g) se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ é hermitiana então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

[**4.10**] Seja M uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial V. Mostre que:

(a) $\|I\|_M = 1$, onde I é a matriz identidade;

(b) se A é invertível, então

$$\|A^{-1}\|_M \geq \frac{1}{\|A\|_M}.$$

[**4.11**] Mostre que a norma de Frobenius não está associada a nenhuma norma vectorial.

[**4.12**] Seja $Q \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz não singular.

(a) Mostre que a função $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \|Q^{-1}x\|_\infty$, define uma norma no espaço vectorial $\mathbb{C}^n$.

(b) Verifique que a norma matricial M associada à norma V da alínea (a) tem a seguinte expressão:

$$\|A\|_M = \|Q^{-1} A\, Q\|_\infty$$

[**4.13**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$ uma matriz tal que $\|A\| < 1$ para alguma norma matricial associada a uma norma vectorial em $\mathbb{C}^n$. Prove que a matriz $I - A$ é não singular e que

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

[**4.14**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a matriz inversa de A usando o método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot.

(b) Determine os valores próprios de A usando o método de Newton para calcular as raízes do polinómio característico de A.

(c) Determine os números de condição da matriz A relativos às normas $\|\cdot\|_p,\ p = 1, 2, \infty$.

[**4.15**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \gg 1.$$

(a) Mostre que os valores próprios da matriz A e os correspondentes vectores próprios são

$$\lambda_1 = \alpha+\beta, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\beta-1}{\alpha} \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \alpha-\beta, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta-1}{\alpha} \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \sqrt{\alpha^2+1}$.

(b) Determine $\mathrm{cond}_p(A),\ \ p = 1, 2, \infty$.

(c) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1,\ \ \tilde{b} = b + \varepsilon u_1,\ \ \varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

(d) Determine as soluções dos sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad A\bar{x} = \bar{b},$$

onde $b = \lambda_1 u_1,\ \ \bar{b} = b + \varepsilon u_2,\ \ \varepsilon \in \mathbb{R}$, e verifique a validade da desigualdade

$$\frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \mathrm{cond}_\infty(A)\frac{\|b-\bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

[**4.16**] Considere a matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

(a) Determine a matriz inversa de A.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A), \mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_*(A)$.

(c) Considere os sistemas lineares

$$Ax = b, \qquad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

onde A é tomada com $\alpha = \beta = 1$, $b \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|b\|_\infty = 1$, $\tilde{b}$ difere de b a menos de 10^{-2m} em cada uma das componentes e $\tilde{A}$ é obtida a partir de A por adição de 10^{-2m} aos seus elementos; m é tal que $n10^{-m} \equiv \mu < 1$. Apresente uma estimativa para o erro relativo da solução $\tilde{x}$ em relação à solução x.

[**4.17**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \;\; 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \;\; 1]^T$.

(a) Determine $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon \;\; 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

(c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1 \;\; 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha

$$\|\delta_b\|_\infty = \frac{\|b - \bar{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \qquad \text{e} \qquad \|\delta_x\|_\infty = \frac{\|x - \bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

[**4.18**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $\mathrm{cond}_1(A)$.

(b) Ao resolver um sistema $Ax = b$ com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \le \varepsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução, $\|\delta_x\|_1$.

[**4.19**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 & -\dfrac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a}{1+a^2} & 0 & \dfrac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule $\mathrm{cond}_\infty(A)$ e $\mathrm{cond}_1(A)$.

(c) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz? E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

[**4.20**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Suponha que ao resolver o sistema $A\,x = b$, com um certo valor de a, obteve a solução $\tilde{x} = (1,1,1)$. Supondo que o valor de a está afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre a solução obtida e a que se obteria se fosse conhecido o valor exacto de a.

[**4.21**] Considere um sistema $Ax = b$ em que o segundo membro é dado com um erro relativo $\|\delta_b\|_1 < 0.1$. Sabendo que a matriz é simétrica e que $\|A\|_\infty \leq 7$, $\|A^{-1}\|_1 \leq 1$, determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$.

[**4.22**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz com a forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Determine $\mathrm{cond}_1(A)$ e $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(c) Sejam b_1 e b_2 dois vectores de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}.$$

Sendo x_1 e x_2 as soluções dos sistemas $A\,x = b_1$ e $A\,x = b_2$, respectivamente, determine um majorante de

$$\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$$

no caso de $n = 20$. Comente.

[**4.23**] **(a)** Sendo $A, X \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$, A não singular, e $\|\cdot\|$ uma norma matricial associada a uma certa norma vectorial em $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\|I - XA\| \leq \mathrm{cond}(A)\, \|I - AX\|.$$

(b) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8.9999 \end{bmatrix}$$

e a seguinte aproximação para a matriz inversa A^{-1}

$$X = \begin{bmatrix} -10067.2 & 20099.9 & -9952.58 \\ 20132.3 & -40198.9 & 19905.2 \\ -10065.5 & 20099.3 & -9952.58 \end{bmatrix}.$$

Calcule $I - AX$ e $I - XA$. Obtenha uma estimativa para $\text{cond}_1(A)$.

[**4.24**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular, superior ou inferior, não singular. Mostre que quer o método de Jacobi quer o método de Gauss-Seidel, com condição inicial arbitrária, permitem obter a solução exacta do sistema num número finito de iteradas e determine quantas.

[**4.25**] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Compare as dez primeiras iteradas dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0]^T$

[**4.26**] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{bmatrix}.$$

Aplique o método de Gauss-Seidel a este sistema partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0.33116 \;\; 0.70000]^T$.

[**4.27**] A matriz $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se uma *matriz de diagonal estritamente dominante por linhas* (MDEDL) se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mostre que uma MDEDL é não-singular.

[**4.28**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 + \cos\theta \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = [0 \;\; -212 \;\; 10^5]^T$.

(b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iteração com $x^{(0)} = [10^5 \;\; 10^6 \;\; 0]^T$.

(c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?

[**4.29**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 1 & -3 & -10 \\ 10 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 22 \\ -21 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

(a) Por reordenação das linhas obtenha um sistema $A'x = b'$ para o qual os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes para a sua solução para qualquer condição inicial. Justifique.

(b) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Jacobi com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

(c) Determine um valor aproximado da solução do sistema $A'x = b'$ com um erro absoluto inferior a 0.1 pelo método de Gauss-Seidel com condição inicial $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

[**4.30**] Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na $4^{\underline{a}}$ iterada. Considere $x^{(0)} = [-4 \;\; -4 \;\; -4]^T$.

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $x^{(k)}$.

[**4.31**] Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

(a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

(b) Escreva o sistema na forma iterativa e determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

[4.32] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Identifique a matriz B e o vector c. Se $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(k)}$.

[4.33] Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|\rho| < 1$, onde $\rho = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) Supondo que para ambos os métodos a convergência está garantida calcule o limite

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \right)^{1/k}.$$

(c) Nas condições da alínea (b), partindo de uma aproximação inicial arbitrária $x^{(0)}$, quantas iterações é necessário efectuar (utilizando cada um dos métodos) para obter uma aproximação $x^{(k)}$, tal que $\|e^{(k)}\| \leq \varepsilon$?

(d) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max \left(\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|} \right)$.

(e) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [2 \;\; 1]^T$. Com base na alínea (d) determine um majorante do erro do resultado obtido.

[**4.34**] Considere as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

(a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

(b) Considere $\beta = 1, \alpha = 2$, e $b = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

(i) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ ou outro vector qualquer, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que o raio espectral da matriz C associada ao método de Jacobi é 0).

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = [1 \;\; 2 \;\; 1]^T$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(2)} = x^{(1)} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$. Verifique que esse vector é um vector próprio associado ao valor próprio 1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

[**4.35**] Pretende-se determinar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 2^n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2^n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2^n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \\ \vdots \\ 2^2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema.

(b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, assumindo que $e^{(0)} = [-1 \;\; 2^n \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]^T$.

(c) Comente quanto à rapidez de convergência quando $n \to \infty$.

[**4.36**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 3 & 4 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é definida positiva.

Nota. Uma matriz simétrica $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ diz-se *definida positiva* se e só se $x^T A x > 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uma matriz é definida positiva se e só se são positivos os determinantes de todos os menores principais de A; chama-se *menor principal* de A à submatriz de dimensão k de A cujos elementos são os elementos das primeiras k linhas e k colunas de A, com $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Determine os valores de α para os quais a matriz $2D - A$, onde D é uma matriz diagonal com a mesma diagonal principal que A, é definida positiva.

(c) Determine os valores de α para os quais o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b, \ \ \forall b \in \mathbb{R}^3, \ \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(d) Determine os valores de α para os quais o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b, \ \ \forall b \in \mathbb{R}^3, \ \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

[**4.37**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para o qual foi verificado no Exercício [4.36] que o método de Gauss-Seidel converge para a sua solução para qualquer condição inicial enquanto que o método de Jacobi não converge para todas as condições iniciais. Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$ se e só se as condições iniciais pertencerem ao plano

$$\left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = \frac{1}{8} \right\}.$$

[**4.38**] Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, caso utilizar o método de Gauss-Seidel, a convergência depende da aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial (diferente da solução exacta) para a qual o método é convergente e uma aproximação inicial para a qual o método é divergente.

[**4.39**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e definida positiva.

(a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que se, além de $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ ser simétrica e definida positiva, também a matriz $2D - A$, onde $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ é definida positiva, então o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

[**4.40**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$0 < \alpha < 1$, e b é um vector arbitrário. Estude a convergência do método de Gauss-Seidel modificado com parâmetro $\omega > 0$ para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial para todos os valores de α e ω.

[**4.41**] Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

e b é um vector arbitrário. Determine os valores do parâmetro $\omega \in \mathbb{R}^+$ para os quais o método de Jacobi modificado converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial e o valor ω_{opt} para o qual o método converge mais rapidamente.

[**4.42**] **(a)** Mostre que a condição $\omega \in (0, 2)$ é necessária para que o método das relaxações sucessivas convirja para a solução do sistema $Ax = b$.

(b) Prove que, se $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ for simétrica e definida positiva, então a condição $\omega \in (0, 2)$ é suficiente.

[**4.43**] Seja $A \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ uma matriz tal que os seus valores próprios são complexos:

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib.$$

Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica de um sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método da iteração simples*:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^2,$$

onde ω é um parâmetro real. Determine:

(a) o intervalo de valores de ω, para os quais está garantida a convergência do método;

(b) o valor ω_{opt}, para o qual se obtém, em princípio, a maior rapidez de convergência, e o valor correspondente do raio espectral da matriz iteradora do método $C(\omega) = I - \omega A$.

[**4.44**] Considere o sistema linear $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Sabendo que os valores próprios de A satisfazem $\lambda_i \in [5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}], i = 1, \ldots, 5$, determine os valores de ω para os quais o método iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(Ax^{(k)} - b), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

converge para x qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$.

(b) Seja $\omega = 0.2$. Partindo de $x^{(0)} = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$, calcule as três primeiras iteradas pelo método da alínea a). Estime o erro da iterada $x^{(3)}$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

[**4.45**] Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?

(b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

(c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

[**4.46**] Seja $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma matriz não-singular e seja $C \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ uma aproximação de A^{-1}. Considere o seguinte método iterativo para a resolução numérica do sistema linear $Ax = b$, conhecido por *método de correcção residual*:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + Cr^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, & k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(a) Mostre que se $\|I - CA\| < 1$, então o método converge para x qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Seja $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon B$, com

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $0 < \varepsilon \ll 1$. Aproxime a solução do sistema $A(\varepsilon)x = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$ e $\varepsilon = 10^{-4}$ pelo método de correcção residual com um erro inferior a 10^{-5}. Tome $C = A_0^{-1}$, isto é,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$