

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2007/2008 Semestre: 1^o

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exercícios

[2.1] Seja N uma norma num espaço vectorial E . Mostre que

$$\|x - y\|_N \geq \left| \|x\|_N - \|y\|_N \right|, \quad \forall x, y \in E.$$

[2.2] Sejam $p, q \in]1, \infty[$ expoentes conjugados, isto é, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Demonstre a desigualdade de Young,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

b) Demonstre a desigualdade de Hölder,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

c) Mostre que a *norma-p*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

satisfaz à *desigualdade de Minkowski* (desigualdade triangular)

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

[2.3] Chama-se *esfera unitária* em \mathbb{R}^n segundo a norma- p ao subconjunto

$$S_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = 1\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Represente graficamente no plano \mathbb{R}^2 as esferas unitárias S_p .

[2.4] Sendo $x \in \mathbb{C}^n$ mostre que:

$$(a) \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2; \quad (b) \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty;$$

$$(c) \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1; \quad (d) \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty;$$

$$(e) \frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1; \quad (f) \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2.$$

[2.5] Sendo $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ determine a ordem de convergência das sucessões com o seguinte termo geral:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & u_n = 1 + \frac{1}{n^a}; \\ \text{b)} & v_n = 1 + \frac{1}{a^n}; \\ \text{c)} & x_n = 1 + \frac{1}{a^{b^n}}; \\ \text{d)} & y_n = 1 + \frac{1}{a^{b^{n^2}}}; \\ \text{e)} & w_n = 1 + \frac{2 + (-1)^n}{4^n}. \end{array}$$

[2.6] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Esta solução é conhecida como **sucessão de Fibonacci**. Mostre que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[2.7] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+3} - 8x_{m+2} + 20x_{m+1} - 16x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4. \end{cases}$$

[2.8] Determinar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x_{m+2} = \frac{13}{3} x_{m+1} - \frac{4}{3} x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \end{cases}$$

onde α, β são números reais.