# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

**Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica**

**Ano Lectivo: 2007/2008** **Semestre: 1º**

## MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

**Exercícios**

[**10.1**] Considere o problema de valor inicial ou de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com solução

$$y(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}\, e^{4x}.$$

**(a)** Obtenha um valor aproximado $y_2$ para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

**(b)** Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

**(c)** Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação para $y(0.2)$. Compare com o resultado obtido em (a).

**(d)** Obtenha uma aproximação para $y(0.2)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com $h = 0.2$.

[**10.2**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

**(a)** Obtenha um valor aproximado para $y(1)$ pelo método de Heun, usando $h = 0.2$.

**(b)** O mesmo que em (a), pelo método de Taylor de ordem 2.

**(c)** Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta.

[**10.3**] Utilize o método do ponto médio (ou método de Euler modificado) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por

$$y(x) = e^x - 1 - x,$$

compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

[**10.4**] Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000, \end{cases}$$

com solução exacta

$$y(x) = 1000\, e^{0.04x},$$

estime $y(1)$ pelo método de Taylor de ordem 2 e pelo método do ponto médio com $h = 1, h = 0.5, h = 0.25$. Com que método e com que espaçamento obteve uma melhor aproximaçao?

[**10.5**] Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

conduz a

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**(a)** Aplique este método para obter uma solução aproximada de $y(10)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a soluçao do problema anterior é

$$y(x) = e^{-20x}.$$

**(b)** Se $n$ for muito grande, o que acontece com a solução fornecida por este método de Runge-Kutta?

[**10.6**] Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, & 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2, \end{cases}$$

determine um valor aproximado para $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.025$.

[**10.7**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -xy(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{P}$$

**(a)** Mostre que $y(x) = e^{-x^2/2}$ é a única solução de (P). Compare o valor exacto de $y(2)$ com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando $h = 1, h = 0.5$.

**(b)** Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em (a), e determine o número de iterações de forma a garantir um erro absoluto inferior a $10^{-6}$ (admitindo que o valor inicial é exacto). Considerando que $y_0$ é um valor arredondado, com um erro $|e_0| \leq \varepsilon$, qual o valor de $\varepsilon$ máximo de forma a poder garantir o mesmo erro?

[**10.8**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

onde $f \in C([a, b])$ e $y_0$ é uma constante real. Escrevendo a equação na forma

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t)\, dt,$$

mostre que:

**(i)** o método de Euler modificado (ou método do ponto médio) corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral;

**(ii)** o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios ao integral;

**(iii)** o método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem corresponde à aplicação da regra de Simpson ao integral.

[**10.9**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação à segunda variável, $I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e $y_0$ é uma constante real.

**(a)** Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Heun.

**(b)** Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento $h$ do método de Taylor de 4ª ordem.

**(c)** Obtenha um valor aproximado para $Y(x_0+h)$ usando um passo de comprimento $h$ do método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem.

[**10.10**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e lipschitziana na segunda variável. Considere o seguinte método numérico para a aproximação de (P):

$$y_{n+1} = y_n + h[f(x_n, y_n) + g(h)], \qquad n = 0, \ldots, N, \tag{M}$$

onde $x_n = nh, n = 0, \ldots, N,\ h = \frac{1}{N}$, e $g \in C^1[0,\infty]$ é tal que $g(0) = 0$.

**(a)** Mostre que o método (M) é consistente e convergente. O que é que pode dizer sobre a sua ordem de convergência?

**(b)** Sejam $f(x,y) = x \sin y,\ \ \alpha = 3,\ \ g(h) = h$ e $h = 0.2$. Obtenha uma aproximação de $y(1)$ pelo método (M). Determine um majorante para o erro cometido.

[**10.11**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = a. \end{cases}$$

**(a)** Mostre que se $f(x,y) = g(y)$, com $|g(y)| \leq c < 1$ e $|g'(y)| \leq L$, para qualquer $y$, então a sucessão $x_{n+1} = y(x_n)$ converge, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, e o seu limite é $a$.

**(b)** Indique a expressão de $y_1$ para um espaçamento $h$ obtida pelo método de Taylor de segunda ordem.

[**10.12**] Considere a equação diferencial

$$y'(x) = f(y(x)),$$

e suponha que $f'(x) \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}],\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**(a)** Mostre que se $h = 1$, o método de Euler converge para um valor fixo quando $n \to \infty$. Qual?

**(b)** O que acontece quando os valores de $h$ tendem para zero?

**(c)** Calcule uma aproximação de $y(1)$ considerando $h = 0.2$, para

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - x, \qquad y(0) = 1.$$

[**10.13**] Suponha que um método tem uma expressão para o erro $|e_n| \approx Ch^p$, em que $h = (b-a)/n$, para $n$ grande.

**(a)** Encontre uma expressão para obter o valor de $p$, relacionando $|e_{2n}|$ e $|e_n|$.

**(b)** Avalie o critério anterior aplicando-o experimentalmente aos métodos de Euler e ponto-médio, considerando o problema de valor inicial apresentado na alínea (c) do Exercício [10.12].

[**10.14**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x, & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.2)$ e para $y'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$. Sabendo que

$$\max_{x\in[0,0.2]} |y''(x)| \le 2, \qquad \max_{x\in[0,0.2]} |y^{(3)}(x)| \le 2,$$

deduza um majorante para o erro cometido.

[**10.15**] Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

**(a)** Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Euler, usando $h = 0.5$.

**(b)** O mesmo que em (a) pelo método de Euler modificado.

[**10.16**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e Lipschitziana em relação às segunda e terceira variáveis, $I$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, e $y_0, z_0$ são constantes reais.

**(a)** Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando dois passos de comprimento $h/2$ do método de Euler.

**(b)** Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento $h$ do método de Taylor de $2^{\underline{a}}$ ordem.

**(c)** Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ usando um passo de comprimento $h$ do método de Runge-Kutta clássico de $2^{\underline{a}}$ ordem.

**(d)** Obtenha valores aproximados para $Y(x_0 + 2h)$ e $Y'(x_0 + 2h)$ usando um passo de comprimento $h$ do método preditor-corrector constituído pelos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de $2^{\underline{a}}$ ordem, tomando para valores aproximados para $Y(x_0 + h)$ e $Y'(x_0 + h)$ os valores obtidos em qualquer das alíneas anteriores.

[**10.17**] Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{P}$$

onde $f$ é uma função a especificar.

**(a)** Tomando $f(x, y(x)) = y(x)$, aplique o método de Euler com $h = 0.25$, para determinar a aproximação para $y(1)$, e compare com a solução exacta do problema.

**(b)** O mesmo que em (a), mas usando o método do ponto-médio.

**(c)** Tomando $f(x, y(x)) = y(x)^3$, aproxime $y(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

**(d)** Tomando $f(x, y(x)) = y'(x)y(x)^2 - x\,y'(x)^2$, aproxime $y(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.1$.

[**10.18**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y(x)}{x} - y(x)^2, \qquad 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = -1, \end{cases} \tag{P}$$

e o par preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}) + f(x_n, y_n)\right], \qquad j = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{M}$$

**(a)** Sabendo que $|y(x)| \leq 1$, $\forall x \in [1, 2]$, diga para que valores de $h$ a iteração $(\mathrm{M})_2$ é convergente.

**(b)** Aplique o método (M) com $h = 0.5, h = 0.25, h = 0.125$ para obter um valor aproximado de $y(2)$. Efectue apenas uma iteração pelo método corrector.

[**10.19**] **(a)** Deduza um método unipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1 da forma

$$Q(f) = Af\,(x_m) + Bf\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$$

para aproximar o integral,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s))ds,$$

e usando como preditor para $y\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$ o método de Euler explícito.

**(b)** Determine a ordem de consistência do método, e conclua acerca da ordem de convergência.

**(c)** Deduza um método multipasso, usando uma regra de quadratura de grau 1

$$Q(f) = Af(x_{m-2}) + Bf(x_m),$$

para aproximar o mesmo integral da alínea (a).

[**10.20**] **(a)** Deduza um método multipasso implícito, usando uma regra de quadratura

$$Q(f) = Af(x_{m-1}) + Bf(x_{m+1})$$

de grau 1 para aproximar o integral

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(s, y(s))ds,$$

e aproximando $y_{m+1}$ pelo método de Euler modificado.

**(b)** Determine o valor aproximado para $y(1)$, considerando $y'(x) = y(x)/2$, usando este método e inicializando os valores com o método de Euler e com o método de Euler modificado. Comente os resultados face aos valores exactos.

[**10.21**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = \alpha, \end{cases}$$

e o seguinte método multipasso para a sua resolução numérica:

$$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} - 2hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad n \geq 1 \tag{M}$$

com $x_0 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + h,\ n = 1, 2, \ldots$.

**(a)** Verifique que o método (M) é consistente e determine a sua ordem.

**(b)** Sejam $f(x, y) = -y^2$ e $\alpha = 1$. Obtenha um valor aproximado para $y(1.6)$ pelo método (M). Tome $h = 0.1$ e calcule $y_1$ pelo método de Taylor de ordem 2. Compare com a solução exacta.

**(c)** Analise a convergência do método (M).

[**10.22**] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 - y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e o seguinte método implícito a dois passos:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}\left[(3 + a)f_{n+1} - af_n + 3f_{n-1}\right], \qquad n \geq 1, \tag{M}$$

onde $f_n = f(x_n, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$.

**(a)** Supondo que $y \in C^3[0, 1]$, mostre que o método (M) é consistente e que o erro de truncatura local $T_{n+1}$ é de ordem $O(h^2)$. Determine $a$ de modo a que $T_{n+1} = O(h^3)$.

**(b)** Mostre que o método (M) é convergente.

**(c)** Utilize o método (M), com $a = 1$ e $h = 0.1$, para aproximar o valor de $y(0.4)$. Obtenha o valor inicial $y_1$ pelo método de Euler modificado. Compare com a solução exacta

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}.$$

**[10.23]** Determine todos os métodos multipasso convergentes de ordem 2 do tipo

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})\right], \qquad n \geq 1.$$

**[10.24]** Determine todos os métodos multipasso lineares estáveis com 3 passos e ordem de convergência 3.

**[10.25]** Os métodos multipasso de Nyström são obtidos integrando a equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

em $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ e aproximando a função integranda $f(x, y)$ pelo seu polinómio interpolador de grau $p \geq 0$ em $p + 1$ pontos equidistantes $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-p}$.

**(a)** Mostre que os métodos de Nyström têm a forma geral

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \ldots + b_p f(x_{n-p}, y_{n-p})\right], \qquad n \geq p,$$

onde $h = x_{n+1} - x_n$ e

$$b_k = \int_{-1}^{1} \prod_{i=0, i\neq k}^{p} \frac{i+t}{i-k}\, dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, p.$$

**(b)** Obtenha os métodos de Nyström com $p = 0, p = 1$ e $p = 2$. Determine o erro de truncatura local em cada um dos casos.

**(c)** Mostre que todos os métodos de Nyström são convergentes.