INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2007/2008

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 29 de Janeiro de 2008

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_3^2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}.$$

(a)[20] Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \le \frac{1}{4} \right\}.$$

(b)[20] Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução z do sistema (S) usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

(c)[20] Mostre que a determinação de um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução z do sistema (S) usando uma iterada do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = [\varepsilon \;\; 0 \;\; \varepsilon]^T$, onde ε é uma constante real, conduz à resolução de um sistema linear $A_\varepsilon y_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & -4 & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 1 - 2\varepsilon^2 \\ 4\varepsilon - \varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

(d)[20] Determine todos os valores de ε para os quais o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $A_\varepsilon y_\varepsilon = b_\varepsilon$ para qualquer aproximação inicial.

(e)[20] Supondo que $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ determine um majorante do erro $\|y_\varepsilon - y_0\|_1$, sem calcular y_ε.

v.s.f.f.

[2] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^4(\mathbb{R})$:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	5	14

(a)[20] Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela usando a fórmula de interpolação de Lagrange.

(b)[15] Supondo que

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leq e, \qquad \forall x \in [0,3],$$

determine um majorante do erro de interpolação $|f(x) - p_3(x)|$ válido para $\forall x \in [0,3]$.

(c)[15] Supondo que f é tal que

$$f(x+1) = f(x) + (x+1)^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

mostre que

$$f[x, x+1, x+2, x+3, x+4] = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d)[20] Determine o polinómio q da forma

$$q(x) = ax(x-1) + b(x-1)(x-2) + c(x-2)(x-3),$$

que minimiza a soma

$$\sum_{i=0}^{3}[f(x_i) - q(x_i)]^2.$$

[6] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+[y(x)]^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{P}$$

com solução exacta $Y : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a)[10] Obtenha um valor aproximado y_2 para $Y(2h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Euler.

(b)[10] Obtenha um valor aproximado $\hat{y}_1$ para $Y(2h)$, onde $2h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Runge-Kutta clássico de 2ª ordem.

(c)[10] Suponha que pretende resolver numericamente o problema (P) usando o método preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}\right)\right], \end{cases} \tag{I}$$

para $j = 0, 1, 2, \ldots,\ \ n = 0, 1, \ldots, N-1$, onde $Nh = 1$. Determine para que valores de h se pode garantir a convergência da iteração (I).