INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Resolução do Exame de 15 de Janeiro de 2008

[1][20]

$$u = b + c, \qquad v = b - c, \qquad w = \frac{u}{v}, \qquad z = a \times w$$

$$\delta_{\tilde{u}} = p_{u,b}\, \delta_{\tilde{b}} + p_{u,c}\, \delta_{\tilde{c}} + \delta_A = \frac{b}{u}\, \delta_{\tilde{b}} + \frac{c}{u}\, \delta_{\tilde{c}} + \delta_A$$

$$\delta_{\tilde{v}} = p_{v,b}\, \delta_{\tilde{b}} + p_{v,c}\, \delta_{\tilde{c}} + \delta_S = \frac{b}{v}\, \delta_{\tilde{b}} - \frac{c}{v}\, \delta_{\tilde{c}} + \delta_S$$

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{w}} &= p_{w,u}\, \delta_{\tilde{u}} + p_{w,v}\, \delta_{\tilde{v}} + \delta_D = \delta_{\tilde{u}} - \delta_{\tilde{v}} + \delta_D \\ &= b\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) \delta_{\tilde{b}} + c\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) \delta_{\tilde{c}} + \delta_A - \delta_S + \delta_D \\ &= -\frac{2bc}{b^2 - c^2}\, (\delta_{\tilde{b}} - \delta_{\tilde{c}}) + \delta_A - \delta_S + \delta_D\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{z}} &= p_{z,a}\, \delta_{\tilde{a}} + p_{z,w}\, \delta_{\tilde{w}} + \delta_M = \delta_{\tilde{a}} + \delta_{\tilde{w}} + \delta_M \\ &= \delta_{\tilde{a}} - \frac{2bc}{b^2 - c^2}\, (\delta_{\tilde{b}} - \delta_{\tilde{c}}) + \delta_A - \delta_S + \delta_D + \delta_M\end{aligned}$$

[2]
(a)[10]

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

$$p'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

$$p''(x) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{77}{27}, \quad p''\left(\frac{1}{3}\right) = -2, \qquad p(1) = -3, \quad p''(1) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$$

$\Longrightarrow p$ tem uma única raiz real.

$$p(2.0) = -1, \quad p(2.5) = 2.625 \implies z \in [2.0, 2.5]$$

(b)[25]

Condições suficientes de convergência do método de Newton $\forall x_0 \in [2.0, 2.5] = I$:

(0) $p \in C^2(I)$

(i) $p(2.0)\,p(2.5) < 0$

(ii) $p'(x) > 0, \quad \forall x \in I$

(iii) $p''(x) > 0, \quad \forall x \in I$

(iv) $\left|\dfrac{p(2.0)}{p'(2.0)}\right| = 0.2 < 0.5, \qquad \left|\dfrac{p(2.5)}{p'(2.5)}\right| = 0.269 < 0.5$

Método de Newton:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{p(x_m)}{p'(x_m)}, \qquad m \geq 0$$

$$|z - x_m| \leq \frac{1}{K}\,\left(K|z - x_0|\right)^{2^m}, \qquad K = \frac{\max_{x\in I}|p''(x)|}{2\min_{x\in I}|p'(x)|}$$

$$|z - x_0| \leq 0.5, \quad \forall x_0 \in I$$

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x\in I}|p'(x)| = |p'(2)| = 5 \\ \max\limits_{x\in I}|p''(x)| = |p''(2.5)| = 11 \end{array}\right\} \Longrightarrow K = 1.1$$

$$K|z - x_0| \leq 0.55 < 1$$

$$|z - x_m| \leq \frac{(0.55)^{2^m}}{1.1} =: B_m$$

m	x_m	B_m
0	2.5	
1	2.23077	0.275
2	2.17665	0.0832
3	2.17456	0.00761

$$z = 2.17456 \pm \varepsilon, \qquad 0.0 \leq \varepsilon \leq 0.00761.$$

(c)[20]

A raiz z é ponto fixo de g_1 e g_2. Com efeito:

$$p(x) = 0 \iff x = g_1(x), \qquad x > 0$$

$$p(x) = 0 \iff x = g_2(x), \qquad x > 0$$

O método do ponto fixo com função iteradora g_1 converge para o ponto fixo $z \in I$ para x_0 suficientemente próximo de z pois $|g_1'(z)| < 1$. Com efeito:

$$g_1(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}, \qquad g_1'(x) < 0, \ \ \forall x \in I$$

$$g_1''(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{18}{x^4}, \qquad g_1''(x) > 0, \ \ \forall x \in I$$

$$\max_{x \in I} |g'(x)| = |g_1'(2.0)| = \frac{1}{2} < 1$$

O método do ponto fixo com função iteradora g_2 <u>não</u> converge para o ponto fixo z pois $|g_2'(z)| > 1$. Com efeito:

$$g_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - \frac{3}{x}\right)$$

$$g_2'(x) = x + \frac{3}{2x^2}, \qquad g_2'(x) > 0, \ \ \forall x \in I$$

$$g_2''(x) = 1 - \frac{3}{x^3}, \qquad g_2''(x) > 0, \ \ \forall x \in I$$

$$\min_{x \in I} |g_2'(x)| = |g_2'(2)| = \frac{19}{8} > 1$$

[3][30]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{D}{\omega} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{\omega}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = I - M^{-1}A = I - \frac{\omega}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\omega & -\dfrac{2\omega}{3} \\ -\dfrac{\omega}{2} & 1-\omega \end{bmatrix}$$

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda-\omega & -\dfrac{2\omega}{3} \\ -\dfrac{\omega}{2} & 1-\lambda-\omega \end{bmatrix}$$

$$\det(C-\lambda I) = (1-\lambda-\omega)^2 - \frac{\omega^2}{3}$$

$$\text{Valores próprios de } C: \begin{cases} \lambda_1 = 1 - c_1\omega, & c_1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 1.577 \\ \lambda_2 = 1 - c_2\omega, & c_2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.423 \end{cases}$$

$$\text{Raio espectral de } C = r_\sigma(C) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \begin{cases} 1 - c_1\omega, & \omega \le 0 \\ 1 - c_2\omega, & 0 \le \omega \le \omega_{opt} \\ c_1\omega - 1, & \omega_{opt} \le \omega \end{cases}$$

$$\omega_{opt} = \frac{2}{c_1 + c_2} = 1$$

O método de Jacobi modificado converge sse $r_\sigma(C) < 1$, isto é, sse $0 < \omega < \dfrac{2}{c_1}$.

O método converge mais rapidamente para o valor de ω para o qual o raio espectral toma o menor valor, isto é, $\omega = \omega_{opt} = 1$.

[4]

(a)[25]

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$I_1(x^m) = I(x^m), \qquad m = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = I(1) = b^2 \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = I(x) = 0 \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = I(x^2) = \dfrac{b^4}{6} \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = I(x^3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = \dfrac{b^2}{2} \\ -x_0 = \dfrac{b}{\sqrt{6}} = x_1 \end{cases}$$

$$I_1(f) = \frac{b^2}{2}\left[f\left(-\frac{b}{\sqrt{6}}\right) + f\left(\frac{b}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

(b)[10]

A fórmula tem grau de precisão 3 pois, por construção, integra exactamente todos os polinómios de grau menor ou igual a 3, mas não integra nenhum polinómio de grau 4. Com efeito:

$$I_1(x^4) = \frac{b^6}{36} \quad \neq \quad I(x^4) = \frac{b^6}{15}$$

[5][20]

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = I(f - p_2) = I(vW_3)$$

$$v(x) = f[a, c, b, x], \qquad W_3 = (x-a)(x-c)(x-a), \qquad c = \frac{a+b}{2}$$

Introduzindo a função u definida por:

$$u(x) = \int_a^x W_3(t)dt, \qquad u'(x) = W_3(x)$$

$$E_2(f) = \int_a^b v(x)W_3(x)\,dx = \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

Integrando por partes:

$$E_2(f) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)\,dx$$

Sendo $u(a) = 0, \;\; u(b) = 0$ o primeiro termo é zero.

Sendo $u(x) \geq 0, \;\; \forall x \in [a, b],$ o teorema do valor médio para integrais permite escrever

$$E_2(f) = -v'(\eta)\int_a^b u(x)\,dx, \qquad \eta \in]a, b[$$

Usando a definição de derivada da diferença dividida e a relação desta com a derivada da função resulta:

$$v'(\eta) = f[a, c, b, \eta, \eta] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}, \qquad \xi \in]a, b[$$

Atendendo finalmente a que:

$$\int_a^b u(x)\,dx = \frac{(b-a)^5}{120}$$

obtém-se o resultado pretendido:

$$E_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$$

[6] $f(x,y) = 6y^2 + 2x$

(a)^{10} Método de Taylor de 2ª ordem (passo h):

$$y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}(d_f f)(x_0,y_0)$$

$$(d_f f)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2 + f(x,y)12y$$

$$y_1 = 1 + hf(0,1) + \frac{h^2}{2}[2 + 12f(0,1)] = 1 + 6h + \frac{h^2}{2}(2+72)$$

$$y_1 = 1 + 6h + 37h^2$$

(b)^{10} Método de Heun (passo h):

$$\hat{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f\left(x_0+h, y_0 + hf(x_0,y_0)\right)\right]$$

$$\hat{y}_1 = 1 + \frac{h}{2}\left[f(0,1) + f\left(h, 1 + hf(0,1)\right)\right] = 1 + \frac{h}{2}\left[6 + 2h + 6(1+6h)^2\right]$$

$$\hat{y}_1 = 1 + 6h + 37h^2 + 108h^3$$

(c)^{10} Método de Adams-Moulton de 2ª ordem (passo h):

$$\bar{y}_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_0+h,\bar{y}_1)\right]$$

$$\bar{y}_1 = 1 + \frac{h}{2}\left[f(0,1) + f(h,\bar{y}_1)\right] = 1 + \frac{h}{2}\left[6 + 2h + 6\bar{y}_1^2\right]$$

$$3h\bar{y}_1^2 - \bar{y}_1 + 1 + 3h + h^2 = 0$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{6h}\left[1 - \sqrt{1 - 12h(1+3h+h^2)}\right]$$

$$0 < h < h_M, \quad h_M = 0.0688052 \ \text{(raiz positiva de } 1 - 12h - 36h^2 - 12h^3\text{)}.$$

(d)^{10} Significa que

$$\max_{0\le n\le N} \|Y(x_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^2), \quad h \to 0 \qquad (Nh = b - x_0).$$