INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Mestrado em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2007/2008

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Exame de 15 de Janeiro de 2008

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Considere os números reais $a, b \neq c$ e

$$z = a \times \frac{b+c}{b-c}.$$

Supondo que são apenas conhecidos valores aproximados $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ de a, b, c, respectivamente, e que as quatro operações aritméticas envolvidas no cálculo de z, adição, subtracção, divisão e multiplicação têm erros de arredondamento $\delta_A, \delta_S, \delta_D, \delta_M$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{z}$ de z.

[2] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

(a)^{10} Mostre que o polinómio p tem uma única raiz real z e verifique que esta raiz pertence ao intervalo $[2.0, 2.5]$.

(b)^{25} Mostre que o método de Newton com valor inicial $x_0 \in [2.0, 2.5]$ converge para z e utilize este método para obter um valor aproximado da raiz z com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c)^{20} Diga justificadamente qual das duas funções g_1 ou g_2, definidas para $x > 0$ por,

$$g_1(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}, \qquad g_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - \frac{3}{x}\right),$$

pode ser utilizada como função iteradora para obter a raiz z pelo método do ponto fixo.

[3]^{30} Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Suponha que pretende resolver o sistema $Ax = b$, onde b é um vector arbitrário, pelo método de Jacobi modificado com parâmetro real ω. Determine:

(a) o intervalo de valores de ω para os quais o método converge para a solução do sistema para qualquer valor inicial;

(b) o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[4] Considere o integral

$$I(f) = \int_{-b}^{b} w(x) f(x)\, dx,$$

onde $f \in C([-b,b])$ e $w : [-b,b] \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$w(x) = b - |x|.$$

b é uma constante positiva.

(a)^{25} Determine a fórmula de quadratura de Gauss com dois nós de integração,

$$I_1(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1),$$

que aproxima o integral $I(f)$.

(b)^{10} Diga justificadamente qual o grau de precisão da fórmula assim obtida.

[5]^{20} Demonstre a fórmula do erro de integração para o método de Simpson:

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in]a,b[, \qquad f \in C^4([a,b]).$$

[6] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 6[y(x)]^2 + 2x, & 0 \le x \le b, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

com solução exacta $Y : [0,b] \to \mathbb{R}$.

(a)^{10} Obtenha um valor aproximado y_1 para $Y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de 2ª ordem.

(b)^{10} Obtenha um valor aproximado $\hat{y}_1$ para $Y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Heun.

(c)^{10} Obtenha um valor aproximado $\bar{y}_1$ para $Y(h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Adams-Moulton de 2ª ordem $(p = 0, q = 2)$.

(d)^{10} Diga o que significa ser de "2ª ordem" um método de resolução numérica de um problema de valor inicial.