MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 6. Interpolação Polinomial

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Novembro de 2007

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano do
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

6. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Introdução

Exemplo. Dada uma tabela de valores $\{(t_j, P_j), j = 0, 1, \ldots, n\}$, determinar um valor (aproximado) P_a correspondente a um valor $t_a \in]t_0, t_n[$.

Problema. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, f_1, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos,

$$f_j := f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Pretende-se determinar uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pertencente a uma dada classe de funções tal que

$$g(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Os pontos x_j são chamados *pontos* ou *nós de interpolação* e os valores f_j os *valores interpolados*. A função g é chamada a *função interpoladora*. Vamos considerar funções interpoladoras polinomiais.

• Interessa saber se este problema tem solução, se a solução é única e como se calcula.

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n + 1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. Existe um único polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ou seja, tal que

$$p_n(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Dem.: $(\cdots)$

Notas.

(a) É importante distinguir entre a função p_n e as várias *representações* de p_n. Pelo teorema anterior sabemos que p_n é única para cada conjunto de $n + 1$ pares ordenados (x_j, f_j), $j = 0, 1, \ldots, n$. Contudo poderá haver diversas maneiras de representar explicitamente p_n. A demonstração apresentada determina os coeficientes do polinómio por um sistema linear com matriz de Vandermonde. Já de seguida introduziremos a fórmula interpoladora de Lagrange. Mais adiante introduziremos a fórmula interpoladora de Newton. Cada uma dessas representações sugere um algoritmo para o cálculo de p_n.

(b) O facto do grau do polinómio interpolador poder ser menor ou igual a n tem a ver com a possibilidade dos valores $f_0, \ldots, f_n$, coincidirem com os valores de um polinómio q_m de grau $m \leq n$ nos nós de interpolação, isto é, $f_j = q_m(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

(c) Há um número infinito de polinómios de grau $m > n$ que interpolam f nos pontos $x_0, \ldots, x_n$:

$$q_m(x) = p_n(x) + c \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{\mu_i},$$

onde

$$\mu_i \in \mathbb{N}_1, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad m = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

Fórmula interpoladora de Lagrange

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. O polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é dado pela fórmula seguinte, conhecida por **fórmula interpoladora de Lagrange**:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_{j,n}(x), \qquad l_{j,n}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

$l_{0,n}, l_{1,n}, \ldots, l_{n,n}$ são os *polinómios de Lagrange* de grau n associados aos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo.

$$n = 1 : \quad l_{0,1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_{1,1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \ ;$$

$$n = 2 : \quad l_{0,2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \qquad l_{1,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_{2,2} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Fórmula interpoladora de Newton

Proposição. Sejam $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos do intervalo $[a, b]$ e sejam $f_0, \ldots, f_n$, os correspondentes valores de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nesses pontos. O polinómio p_n de grau menor ou igual a n que interpola f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, é dado pela fórmula seguinte, conhecida por **fórmula interpoladora de Newton**:

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_j] \, W_j(x),$$

onde

$$W_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, \ldots, x_j] = \sum_{l=0}^{j} \frac{f(x_l)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{j} (x_l - x_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Os coeficientes $f[x_0, x_1, \ldots, x_j]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, são conhecidos por **diferenças divididas de ordem j da função f associadas aos pontos** $x_0, x_1, \ldots, x_j$.

Dem.: $(\cdots)$

Exemplo.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0]}{x_0 - x_1} + \frac{f[x_1]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Proposição. Sendo $(i_0, i_1, \ldots, i_j)$ uma permutação de $(0, 1, \ldots, j)$ então

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}].$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_j] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_0}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Dem.: $(\cdots)$

• Estas fórmulas permitem calcular as diferenças divididas usando um esquema recursivo que é em geral apresentado sob a forma de uma tabela. Na 1ª coluna escrevem-se os pontos $x_0, x_1, \ldots,$ e na 2ª coluna os valores $f[x_0], f[x_1], \ldots$ Na 3ª coluna escrevem-se as diferenças divididas de 1ª ordem, obtidas por aplicação das fórmulas anteriores; e assim sucessivamente.

Tabela de diferenças divididas:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\cdots$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nota.

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$p_2(x) = f[x_1] + f[x_0, x_1](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_0)$$
$$p_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_2)$$
$$p_2(x) = f[x_2] + f[x_1, x_2](x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_2)(x - x_1)$$
$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_2](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_2)$$
$$p_2(x) = f[x_2] + f[x_0, x_2](x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_2)(x - x_0)$$

Exemplo. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	0	2	8	9

Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela usando:

(a) O método da matriz de Vandermonde.

(b) A fórmula interpoladora de Lagrange.

(c) A fórmula interpoladora de Newton.

Erro de interpolação polinomial

Proposição. Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$. Se $f \in C^{n+1}([a, b])$ então para cada $x \in [a, b]$ existe um ponto $\xi(x) \in]x_0; x_1; \ldots; x_n; x[$ tal que

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x),$$

onde

$$W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja p_n o polinómio interpolador de f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$. Se $f \in C^{n+1}([a, b])$ então

$$e_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] W_{n+1}(x).$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. Seja $f \in C^{n+1}([a, b])$ e sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ pontos distintos de $[a, b]$. Então:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in]x_0; x_1; \ldots; x_n[.$$

Dem.: $(\cdots)$

• A equação que obtivemos para o erro de interpolação de Lagrange não pode ser usada para calcular o valor exacto do erro $e_n(x)$ visto que $\xi(x)$ é em geral uma função desconhecida. Uma excepção é o caso em que $f^{(n+1)}$ é uma constante. Pode no entanto ser usada para obter um majorante do erro.

Proposição. Sendo $f \in C^{n+1}([a,b])$ então:

(1)
$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|W_{n+1}(x)|, \qquad \forall x \in [a,b],$$
onde a constante M_{n+1} é tal que
$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, \qquad \forall x \in [a,b];$$

(2)
$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{\tilde{x}\in[a,b]} |W_{n+1}(\tilde{x})|, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dem.: $(\cdots)$

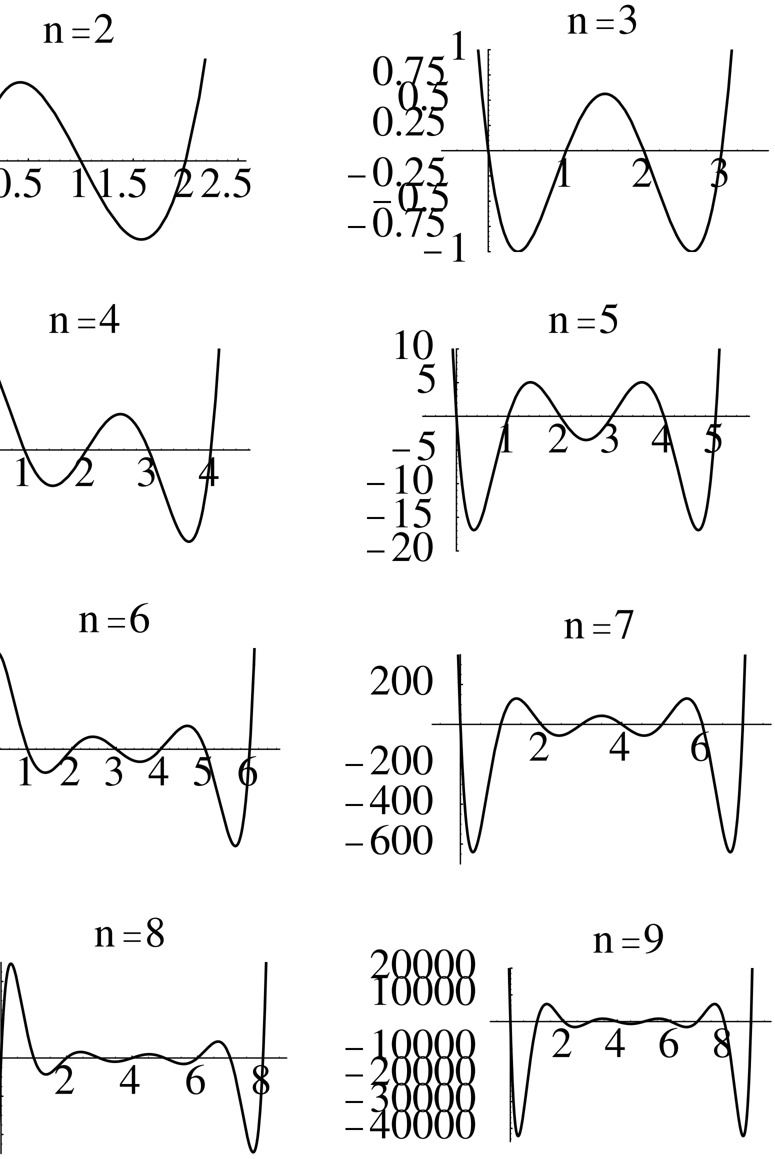
• Estas fórmulas põem em evidência a importância da contribuição da função $|W_{n+1}|$ para o erro de interpolação. Vamos estudar em mais algum pormenor esta função distinguindo dois casos: nós igualmente espaçados e nós de Chebyshev.

Proposição. Suponhamos que os nós de interpolação estão igualmente espaçados entre si:
$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$
onde $h > 0$ é tal que $x_n \leq b$. Sendo $f \in C^{n+1}([a,b])$ a fórmula de majoração do erro de interpolação escreve-se
$$|e_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\Psi_{n+1}(t)|, \qquad \forall x \in [a,b],$$
onde $x = x_0 + th$, e
$$\Psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-i).$$

Dem.: $(\cdots)$

Proposição. A função Ψ_{n+1} tem as seguintes propriedades (ilustradas na figura seguinte):

(1) Ψ_{n+1} é um polinómio mónico de grau $n+1$ com zeros nos pontos $0, 1, \ldots, n$.



(2) Ψ_{n+1} é uma função simétrica ou antisimétrica em relação ao ponto médio dos zeros, $t = \frac{n}{2}$, consoante $n+1$ é par ou ímpar, respectivamente, isto é,

$$\Psi_{n+1}\left(\frac{n}{2} - t\right) = (-1)^{n+1}\Psi_{n+1}\left(\frac{n}{2} + t\right).$$

(3) Em cada intervalo $]i, i+1[,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$, $|\Psi_{n+1}|$ possui um único máximo.

(4) Os valores dos máximos relativos de $|\Psi_{n+1}|$ crescem à medida que t se afasta de $\frac{n}{2}$.

(5) $|\Psi_{n+1}|$ tem um máximo absoluto no intervalo $[0, n]$, o qual ocorre em dois pontos, um no subintervalo $]0, 1[$ e outro no subintervalo $]n-1, n[$, verificando-se a desigualdade

$$\max_{t \in [0,n]} |\Psi_{n+1}(t)| < n!.$$

(6) Este valor máximo absoluto e o seu quociente em relação aos valores dos restantes máximos relativos crescem com n.

(7) $|\Psi_{n+1}(t)|$ cresce rapidamente para $t < 0$ e $t > n$.

Notas. Atendendo à fórmula de majoração do erro e ao que se disse sobre a função Ψ_{n+1} conclui-se que:

(a) na interpolação de f por p_n os nós de interpolação igualmente espaçados $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$, devem ser escolhidos por forma a que x esteja perto do centro do intervalo $[x_0, x_0 + nh]$, isto é, $x \approx x_0 + \frac{nh}{2}$.

(b) o erro de interpolação cresce muito rapidamente quando x se afasta de x_0, para a esquerda, e de $x_0 + nh$, para a direita, o que desencoraja a *extrapolação*, isto é, a aproximação de $f(x)$ por $p_n(x)$ para valores de x fora do intervalo $[x_0, x_0 + nh]$.

Proposição. De entre todas as escolhas de nós de interpolação $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos no intervalo $[-1, 1]$, a quantidade

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|,$$

toma o menor valor possível para

$$x_k = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\,\pi\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

e esse valor é 2^{-n}. Se $f \in C^{n+1}([-1, 1])$ a fórmula de majoração do erro de interpolação escreve-se

$$|e_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}, \qquad \forall x \in [-1, 1].$$

Nota. Os nós que acabámos de introduzir são chamados **nós de Chebyshev**. Eles são os $n + 1$ zeros do chamado **polinómio de Chebyshev** de grau $n + 1$, habitualmente designado por T_{n+1}, que introduziremos no capítulo seguinte.

Exemplo. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$.

(a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos $x_0 = -a,\ x_1 = 0, x_2 = a$, onde $a \in]0, 1]$.

(b) Determine um majorante do erro de interpolação válido para todos os pontos do intervalo $[-1, 1]$.

(c) Determine o valor de a para o qual o majorante do erro de interpolação tem o menor valor possível.