MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Cap. 2. Métodos Iterativos

Filipe J. Romeiras

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

Outubro de 2007

Apontamentos das aulas da disciplina do mesmo nome do 2º ano do
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

2. MÉTODOS ITERATIVOS

Normas vectoriais

Definição. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Uma função $N : E \to \mathbb{R}$ diz-se uma **norma** se verificar as seguintes condições:

(1) $N(x) \geq 0, \ \ \forall x \in E; \ \ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(2) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x), \ \ \forall x \in E, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

(3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \ \ \forall x, y \in E.$ (Desigualdade triangular)

Notação. $\|x\|_N = N(x)$

Exemplo. Normas em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(1) Norma da soma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(2) Norma Euclidiana

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

(3) Norma do máximo

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(4) Norma-p, $p \geq 1$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Nota. A desigualdade triangular para a norma-p,

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \forall p \geq 1,$$

é conhecida por **desigualdade de Minkowski**.

Definição. Um espaço vectorial no qual está definida uma norma diz-se um **espaço normado**.

Definição. Sejam E um espaço normado com a norma N e X um subconjunto de E. Então $f : E \to \mathbb{R}$ diz-se uma **função contínua** em X se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in X : N(x-y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposição. Uma norma N num espaço vectorial E é uma função contínua de E em $\mathbb{R}$.

Definição. Diz-se que duas normas N e M num espaço vectorial E são **equivalentes** se existirem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 M(x) \leq N(x) \leq C_2 N(x), \qquad \forall x \in E.$$

Teorema. Todas as normas num espaço vectorial de dimensão finita são equivalentes.

Exemplo. Sendo $x \in \mathbb{C}^n$:

(1) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

(2) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(3) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$

Definição. Sendo $x, y \in \mathbb{C}^n$ define-se o seu **produto interno** $< x, y >$ por

$$< x, y >= y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

Proposição. Sendo $x, y, z \in \mathbb{C}^n, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{C})$.

(1) $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$;

(2) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$; $\qquad < x, \alpha y >= \bar{\alpha} < x, y >$;

(3) $< x, y >= \overline{< y, x >}$;

(4) $< x, x >\geq 0$; $\qquad < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(5) $\|x\|_2 = (< x, x >)^{1/2}$;

(6) $| < x, y > | \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, verificando-se a igualdade se e só se $y = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{C}$.
(**Desigualdade de Cauchy-Schwartz**)

(7) $< Ax, y >=< x, A^* y >$, onde A^* designa a matrix conjugada transposta de A.

Nota. Designaremos o espaço de matrizes quadradas de ordem n por $\mathbb{M}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}^n(\mathbb{C})$, consoante os elementos das matrizes sejam reais ou complexos.

Erro, erro absoluto, erro relativo ($\tilde{x} \approx x \in E$)

Definição. Seja E um espaço normado com norma $\| \cdot \|$ e $\tilde{x}$ o valor aproximado de $x \in E$.

Definem-se:

Erro de $\tilde{x}$ em relação a x: $e_{\tilde{x}} = x - \tilde{x}$

Erro absoluto de $\tilde{x}$ em relação a x: $\|e_{\tilde{x}}\|$

Erro relativo de $\tilde{x}$ em relação a $x \neq 0$: $\delta_{\tilde{x}} = \dfrac{e_{\tilde{x}}}{\|x\|}$, ou $\|\delta_{\tilde{x}}\| = \dfrac{\|e_{\tilde{x}}\|}{\|x\|}$

(Percentagem de erro: $100\|\delta_{\tilde{x}}\|(\%)$)

Nota. Os erros dependem da norma utilizada.

Exemplo. Sendo $x = (\pi, \sqrt{2}, 1)$, $\tilde{x} = (3.14, 1.4, 1.01)$:

$$x - \tilde{x} = (0.00159265, \quad 0.0142136, \quad -0.01)$$

$$\|e_{\tilde{x}}\|_1 = 0.0258063, \qquad \|e_{\tilde{x}}\|_2 = 0.0174517, \qquad \|e_{\tilde{x}}\|_\infty = 0.0142136.$$

Convergência e ordem de convergência

Definição. Seja $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de um espaço normado E. Diz-se que esta sucessão **converge** para um certo $x \in E$ segundo a norma N, escrevendo-se simbolicamente $x^{(k)} \xrightarrow{N} x$, se e só se

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_N = 0.$$

Nota. Do teorema anterior sobre a equivalência de todas as normas num espaço de dimensão finita resulta que se uma dada sucessão $\{x^{(k)}\}$ converge para um certo $x \in E$ segundo uma certa norma N, então também converge para x segundo qualquer outra norma M. Esta observação permite-nos, enquanto estivermos a tratar de espaços de dimensão finita, falar de convergência sem nos referirmos a nenhuma norma em especial. Por isso dizemos simplesmente que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ converge para x e escrevemos simbolicamente $x^{(k)} \to x$.

Nota. Sempre que não haja risco de confusão designaremos, por simplicidade de notação, o termo geral de uma sucessão por x_n em vez de por $x^{(n)}$.

Definição. Seja x_n uma sucessão convergente para x e seja $e_n = x - x_n \neq 0$. Para $r \geq 1$ consideremos a sucessão

$$K_n^{[r]} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}.$$

(1) Se existir n_0 tal que

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad K_n^{[r]} \leq K^+ < M_r,$$

onde $M_1 = 1$ e $M_r = +\infty$, $r > 1$, diz-se que a sucessão tem **ordem de convergência (o.c.) maior ou igual a** r.

(2) Se além disso
$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < K^- \le K_n^{[r]},$$
diz-se que a sucessão tem **o.c.** r.

(3) Se existir
$$K_\infty^{[r]} = \lim_{n\to\infty} K_n^{[r]},$$
este valor é designado por **coeficiente assimptótico de convergência de ordem** r, verificando-se então:

$K_\infty^{[r]} < M_r$:	a sucessão tem o.c. maior ou igual a r;
$0 < K_\infty^{[r]} < M_r$:	a sucessão tem o.c. r; se $r = 1$ a convergência diz-se linear; se $r = 2$ a convergência diz-se quadrática;
$K_\infty^{[r]} = 0, \quad \forall r > 1$:	a sucessão tem convergência exponencial;
$K_\infty^{[1]} = 0$:	a sucessão tem convergência supralinear;
$K_\infty^{[1]} = 1$:	a sucessão tem convergência logarítmica ou infralinear.

Nota. Se a sucessão tem o.c. r, então tem o.c. maior ou igual a q, $\quad 0 < q < r$. Com efeito, como $\lim_{n\to\infty} \|e^{(n)}\|^{r-q} = 0$, tem-se
$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^q} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}\|e_n\|^{r-q} \to K_\infty^{[r]} \times 0 = 0.$$

Por outro lado, se a sucessão tem o.c. r, então não pode ter o.c. superior a r. Com efeito, sendo $q > p$, como $\lim_{n\to\infty} \|e_n\|^{r-q} = \infty$ e $K_\infty^{[r]} \ne 0$, tem-se
$$\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^q} = \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^r}\|e_n\|^{r-q} \to K_\infty^{[r]} \times \infty = \infty.$$

Exemplo. As quatro sucessões seguintes convergem para 1 com a ordem de convergência indicada ($a, b \in \mathbb{Z}, \quad a, b \ge 2$):

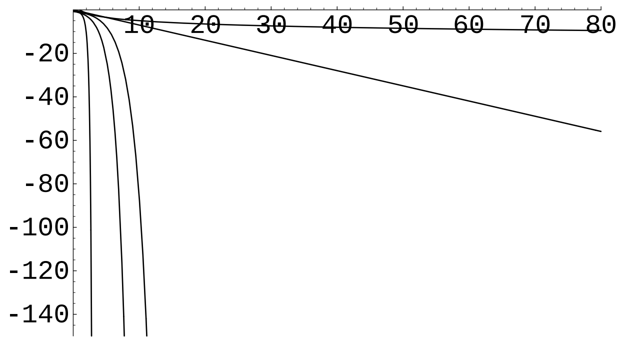
(1) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^a}$: convergência logarítmica ou infralinear

(2) $v_n = 1 + \dfrac{1}{a^n}$: convergência linear

(3) $x_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^n}}$: convergência (supralinear) de ordem b

(4) $y_n = 1 + \dfrac{1}{a^{b^{n^2}}}$: convergência exponencial

Gráficos de $\log_{10}|e_n|, \quad e_n = 1 - u_n$, em função de n para
$$(1)\ u_n = 1 + n^{-5}; \qquad (2)\ u_n = 1 + 5^{-n};$$



$$(3)'\ u_n = 1 + 5^{-r^n}, \quad r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \qquad (3)\ u_n = 1 + 5^{-2^n}; \qquad (4)\ u_n = 1 + 5^{-2^{n^2}},$$

no sentido dos ponteiros do relógio.

Exemplo. Consideremos a sucessão

$$w_n = 1 + \frac{2 + (-1)^n}{4^n}.$$

Uma vez que

$$K_n^{[1]} = \frac{|1 - w_{n+1}|}{|1 - w_n|} = \frac{1}{4}\,\frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{12}, & n \text{ par}, \\ \dfrac{3}{4}, & n \text{ ímpar}, \end{cases}$$

não existe $K_\infty^{[1]}$. No entanto, como podemos escrever,

$$0 < \frac{1}{12} \le K_n^{[1]} \le \frac{3}{4} < 1,$$

concluímos que a sucessão tem convergência linear.

Métodos iterativos

Definição. Seja X um subconjunto de um espaço normado E e seja $p \ge 1$ um inteiro. Chama-se **método iterativo a p passos** em E à aplicação $\Psi : X^p \to E^{\mathbb{N}}$ que a cada $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \in X^p$ associa uma sucessão $\{x^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tal que

$$\begin{cases} x^{(i)} = \xi_i, & \forall i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \\ x^{(m+p)} = \phi\left(x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots, x^{(m+p-1)}\right), & \forall m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

onde $\phi : X^p \to X$ é uma função conhecida. Diz-se que ϕ é a **função iteradora**, $x^{(m+p)}$ é a **iterada** de ordem $m + p$ e $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1})$ são os **valores iniciais**.

Definição. Diz-se que o método iterativo Ψ a p passos é **convergente** para $x \in E$, num certo domínio $D \subset X^p$, se para quaisquer valores iniciais $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \in D$ se verificar que $x^{(m)} \to x$.

Definição. Diz-se que o método iterativo é de ordem r se a sucessão gerada pelo método tem ordem de convergência r.

Exemplo. Os seguintes métodos iterativos utilizam-se na determinação de zeros de funções $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(1) Método do ponto fixo ($f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x)$):

$$\begin{cases} x_{m+1} = g(x_m), & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I \end{cases}$$

(2) Método de Newton:

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m - \dfrac{f(x_m)}{f'(x_m)}, & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I \end{cases}$$

(3) Método da secante:

$$\begin{cases} x_{m+2} = x_{m+1} - f(x_{m+1})\, \dfrac{x_{m+1} - x_m}{f(x_{m+1}) - f(x_m)}, & m \in \mathbb{N}, \\ x_0 = \xi_0 \in I, \;\; x_1 = \xi_1 \in I \end{cases}$$

Os métodos têm o.c. 1, 2 e $r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, respectivamente.

Equações às diferenças

Definição. Por uma **equação às diferenças de ordem** $p \in \mathbb{N}_1$ linear e de coeficentes constantes, entende-se uma equação da forma

$$x_{m+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_{m+i} = 0,$$

onde $m \in \mathbb{N}, x_m \in \mathbb{C}$ e os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ são números complexos.

Definição. O **problema de valor inicial** para a equação às diferenças consiste em determinar a solução da equação que satisfaça às condições iniciais

$$x_i = \xi_i, \qquad \forall i \in \{0, \ldots, p-1\},$$

onde $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ são dados. Este problema constitui um método iterativo a p passos de acordo com a definição apresentada anteriormente.

Exemplo. A sucessão gerada pelo método iterativo

$$\begin{cases} x_{m+2} - x_{m+1} - x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = x_1 = 1, \end{cases}$$

é conhecida como **sucessão de Fibonacci.**

Exemplo. Solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_{m+2} + a_1 x_{m+1} + a_0 x_m = 0, & m \geq 0, \\ x_0 = \xi_0, \quad x_1 = \xi_1. \end{cases}$$

Sendo r_1, r_2 os zeros do polinómio $P(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ tem-se:

(1) $r_1 \neq r_2$

$$x_m = c_1 r_1^m + c_2 r_2^m, \qquad c_1 = \frac{r_2 \xi_0 - \xi_1}{r_2 - r_1}, \qquad c_2 = \frac{-r_1 \xi_0 + \xi_1}{r_2 - r_1}$$

(2) $r_1 = r_2$

$$x_m = r_1^m (c_1 + c_2 m), \qquad c_1 = \xi_0, \qquad c_2 = \frac{\xi_1}{r_1} - \xi_0$$

Proposição. Considere-se a equação às diferenças de ordem p

$$x_{m+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_{m+i} = 0.$$

Seja

$$P(z) = z^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i,$$

o *polinómio característico* da equação. Então:

(1) (i) Se P tem p raízes distintas $z_1, z_2, \ldots, z_p$, a solução geral da equação é

$$x_m = \sum_{i=0}^{p} C_{i0} z_i^m.$$

(ii) Se P tem q raízes distintas, $1 \leq q < p$, $z_1, \ldots, z_q$, com multiplicidades $\mu_1, \ldots, \mu_q$, respectivamente, verificando a identidade $\mu_1 + \ldots + \mu_q = p$, a solução geral da equação é

$$x_m = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=0}^{\mu_i - 1} C_{ij}\, m^j \right) z_i^m.$$

Em ambos os casos os C_{ij} são constantes arbitrárias.

(2) O problema de valor inicial tem uma solução única, com as constantes C_{ij} fixadas pelas condições iniciais.

Exemplo. A sucessão de Fibonacci tem o termo geral

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}\right].$$

Exemplo. **Instabilidade numérica** ilustrada pelo método iterativo a dois passos definido por

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\,x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\,x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = 1, \;\; x_1 = \dfrac{1}{3}, & \end{cases}$$

cuja solução exacta é

$$x_m = \left(\frac{1}{3}\right)^m.$$

Na página seguinte apresentam-se os resultados do cálculo numérico da sucessão $\tilde{x}_m$ gerada pelo método iterativo em precisão simples e dupla.

Os resultados podem ser interpretados a partir da solução exacta do problema de valor inicial perturbado,

$$\begin{cases} x_{m+2} = \dfrac{13}{3}\,x_{m+1} - \dfrac{4}{3}\,x_m, & m \geq 0, \\ x_0 = 1 + \varepsilon_0, \;\; x_1 = \dfrac{1}{3} + \varepsilon_1, & \end{cases}$$

onde $|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1| \ll 1$:

$$x_m = \left[1 + \frac{3}{11}(4\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\right]\left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{11}(3\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(4)^m.$$

Cálculo da sucessão $\t{x}_m$ em precisão simples:

m	$\t{x}_m$	x_m	$1 - \t{x}_m/x_m$
0	1.	1.	0.
1	0.333333343	0.333333343	0.
2	0.111111164	0.111111119	-4.02331324E-07
3	0.0370372571	0.037037041	-5.83380415E-06
4	0.0123465639	0.012345681	-7.15143833E-05
5	0.00411876757	0.00411522714	-0.000860322558
6	0.00138590776	0.00137174246	-0.010326501
7	0.000513910258	0.000457247486	-0.123921447
8	0.000379067467	0.000152415843	-1.48706079
9	0.000957412063	5.08052835E-05	-17.8447342
10	0.00364336255	1.69350951E-05	-214.136826
11	0.0145113552	5.64503171E-06	-2569.64185
12	0.0580247231	1.88167735E-06	-30835.7012
13	0.232092008	6.27225802E-07	-370028.438
14	0.928365767	2.09075282E-07	-4440341.
15	3.71346235	6.96917581E-08	-53284096.

Cálculo da sucessão $\t{x}_m$ em precisão dupla:

m	$\t{x}_m$	x_m	$1 - \t{x}_m/x_m$
0	1.	1.	0.
1	0.333333333	0.333333333	9.99200722E-15
2	0.111111111	0.111111111	1.30770395E-13
3	0.037037037	0.037037037	1.58029839E-12
4	0.012345679	0.012345679	1.89748217E-11
5	0.00411522634	0.00411522634	2.27709242E-10
6	0.00137174211	0.00137174211	2.73252339E-09
7	0.000457247356	0.000457247371	3.27902927E-08
8	0.00015241573	0.00015241579	3.93483525E-07
9	5.08050235E-05	5.08052634E-05	4.72180232E-06
10	1.69341282E-05	1.69350878E-05	5.66616278E-05
11	5.64119099E-06	5.64502927E-06	0.000679939534
12	1.86632331E-06	1.88167642E-06	0.00815927441
13	5.65813017E-07	6.27225474E-07	0.0979112929
14	-3.65746704E-08	2.09075158E-07	1.17493551
15	-9.12907595E-07	6.96917194E-08	14.0992262