

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Licenciatura em Engenharia Química  
Licenciatura em Engenharia Biológica  
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exercícios

**1.1.** Represente  $x$  em vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos:

- a)  $x = 1/6$ ;                      b)  $x = 1/3$ ;                      c)  $x = -83784$ ;  
d)  $x = -83785$ ;                      e)  $x = 83798$ ;                      f)  $x = 0.0013296$ .

**1.2.** Tomaram-se para valores aproximados de

$$x = 0.3000 \times 10^{-3}, \quad y = 0.3000 \times 10^1, \quad z = 0.3000 \times 10^4,$$

respectivamente os valores

$$\tilde{x} = 0.3100 \times 10^{-3}, \quad \tilde{y} = 0.3100 \times 10^1, \quad \tilde{z} = 0.3100 \times 10^4.$$

Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

**1.3.** Considere os números  $x = \pi$  e  $y = 2199/700$ .

a) Pretendem-se aproximações  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda  $\tilde{x} - \tilde{y}$ .

b) Calcule os erros absolutos e relativos de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  e de  $\tilde{x} - \tilde{y}$ , bem como as percentagens de erro. Comente.

c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa os números  $x$  e  $y$ . Determine  $fl(fl(x) - fl(y))$  e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação à alínea b)?

**1.4.** Determine o erro absoluto cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de vírgula flutuante com mantissa de comprimento 6.

**1.5.** Sendo  $x$  e  $y$  números positivos considerados num sistema de vírgula flutuante decimal tais que  $x > y$  e

$$10^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 10^{-q},$$

mostre que pelo menos  $p$  e no máximo  $q$  dígitos significativos são perdidos ao efectuar a diferença  $x - y$ .

**1.6.** Considere os valores

$$A = 0.492, \quad B = 0.603, \quad C = -0.494, \quad D = -0.602, \quad E = 10^{-5}$$

Com a finalidade de calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E},$$

dois indivíduos, usando uma máquina com três dígitos na mantissa e com arredondamento simétrico, efectuaram esse cálculo de forma distinta, mas aritmeticamente equivalente.

O indivíduo  $X$  calculou  $A + B$ , depois  $C + D$ , somou os valores, e dividiu por  $E$ , obtendo  $F = 0$ .

Por seu turno, indivíduo  $Y$  calculou  $A + C$ , depois  $B + D$ , somou os valores, e dividiu por  $E$ , obtendo  $F = -100$ .

Verifique os cálculos efectuados pelos dois indivíduos e comente a disparidade de resultados obtidos, atendendo a que se usaram processos matematicamente equivalentes.

**1.7.** Considere os valores

$$x = 0.100456683, \quad y = 0.0995214437.$$

Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir a

$$xy, \quad x/y, \quad x + y, \quad x - y,$$

ao efectuar as operações num sistema de vírgula flutuante VF(10,7,-38,38) com arredondamento simétrico.

**1.8.** Considere um sistema de vírgula flutuante VF(10,7,-38,38) com arredondamento simétrico. Sendo  $u = 0.5 \times 10^{-6}$  a unidade de arredondamento do sistema e  $v = 0.9u$  calcule  $fl(1 + u)$  e  $fl(1 + v)$ .

**1.9.** Mostre que, usando a aproximação

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

se têm as seguintes estimativas para o erro absoluto e relativo:

$$|e_{\cos(x)}| \leq \frac{1}{2880} \approx 0.35 \times 10^{-3}, \quad |\delta_{\cos(x)}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2880},$$

para qualquer  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .

**1.10.** Considere a função real de variável real

$$f(x) = 1 - \cos x.$$

**a)** Determine para que valores de  $x$  o cálculo de  $f(x)$  conduz a um problema mal condicionado.

**b)** Considere o seguinte algoritmo para o cálculo de  $f$ :

$$z_1 = \cos x; \quad z_2 = 1 - z_1.$$

Mostre que o algoritmo é instável para  $x \approx 0$  (apesar de o problema ser bem condicionado).

**c)** Baseado na fórmula  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$  proponha um algoritmo equivalente que seja numericamente estável para  $x \approx 0$ .

**1.11.** Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

**a)** Calcule  $f(10^{-6})$  usando a fórmula anterior.

**b)** Obtenha uma aproximação de  $f(10^{-6})$  usando o desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor em torno de  $x = 0$ .

**c)** Sabendo que  $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ , calcule  $f(10^{-6})$  usando uma nova fórmula para  $f$ .

**d)** Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

**1.12.** Sejam  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  valores aproximados de  $x, y, z$ , respectivamente, com erros relativos  $\delta_{\tilde{x}}, \delta_{\tilde{y}}, \delta_{\tilde{z}}$ . Determine uma estimativa do erro relativo cometido no cálculo de  $v = xy + z$  num computador com unidade de arredondamento  $u$  e usando os valores aproximados.

**1.13.** Considere o cálculo de

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

que pode ser feito usando três algoritmos diferentes:

$$w_1 = x \times x - y \times y$$

$$w_2 = (x + y) \times (x - y)$$

$$w_3 = (x + y) \times x - (x + y) \times y.$$

**a)** Determine as expressões dos erros relativos dos três algoritmos.

**b)** Supondo que  $x$  e  $y$  são representados exactamente no computador, determine para cada algoritmo condições para as quais este algoritmo é melhor do que os outros.

**1.14.** Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de vírgula flutuante VF(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de  $x$  muito grandes o erro relativo era também muito grande.

**a)** Verifique que o erro relativo é 100% para  $x = 2000$ . Qual o valor do erro relativo para valores de  $x$  ainda maiores?

**b)** Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular  $f(x)$  que não apresente erros relativos tão grandes.

**1.15.** Considere a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

e suponha que todos os coeficientes são positivos e exactos e tais que  $b^2 \gg ac$ . Como é sabido as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faça  $a = 1$ ,  $b = 62.10$ ,  $c = 1$ . A equação correspondente tem raízes  $x_1 \approx -0.01610723$  e  $x_2 \approx -62.08390$ . Usando aritmética de vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para  $x_1$  e  $x_2$ . Dê uma explicação para o mau valor que obteve para  $x_1$  e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

**1.16.** Sabendo que  $\cos(x_k)$  para  $k = 1, \dots, 20$  é calculado com um erro relativo inferior a  $10^{-6}$ , indique uma estimativa para o erro relativo de

$$P = \prod_{k=1}^{20} \cos(x_k)$$

baseando-se nas fórmulas obtidas para a propagação do erro relativo em funções.

**1.17.** Determine uma função  $f$  que verifique

$$\tilde{\delta}_f(x) = xe^{-x}\delta_x.$$

**1.18.** Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

b) Suponha que o sistema é resolvido numa calculadora onde os números são representados num sistema de vírgula flutuante, apenas com 6 dígitos na mantissa. Que solução obteria nesse caso? Compare com a solução exacta.

c) Suponha que o sistema é resolvido na mesma máquina, mas usando pesquisa parcial de pivot. Qual é o resultado nestas condições? Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

**1.19.** Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^6 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que este sistema é equivalente ao do exercício anterior.

b) Será que, neste caso, a pesquisa parcial de pivot permite superar os efeitos dos erros de arredondamento, como acontecia no exercício anterior? Justifique.

c) Resolva o sistema, utilizando o método da pesquisa total de pivot. Comente.

**1.20.** Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de eliminação de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

com solução exacta  $x = 10.00$  e  $y = 1.000$ . Suponha que efectua os cálculos no sistema VF(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

**1.21.** Considere os seguintes dois sistemas de equações equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 20000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo que efectua os cálculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

**1.22.** Considere o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot. Compare os resultados e comente.