INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2002/2003

ANÁLISE NUMÉRICA

Trabalho Nº 4

Resolução numérica de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x \in [x_0, b], \\ y(x_0) = Y_0, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : [x_0, b] \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, é uma função contínua e Lipschitziana em relação à variável y e $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ é uma constante.

(1) Escreva um programa para obter uma aproximação da solução do problema (P) pelo método de Runge-Kutta clássico de $4^{\underline{a}}$ ordem.

(2) Escreva um programa para obter uma aproximação da solução do problema (P) pelo método preditor-corrector constituído pelo método de Adams-Bashforth de $3^{\underline{a}}$ ordem e pelo método de Adams-Moulton de $4^{\underline{a}}$ ordem. Efectue apenas uma iteração pelo método corrector.

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{12}\left[23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2})\right], \\ y_{n+1}^{(1)} = y_n + \dfrac{h}{24}\left[9f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]. \end{cases}$$

Obtenha os valores iniciais (y_1 e y_2) pelo método de Runge-Kutta clássico de $4^{\underline{a}}$ ordem.

Os programas devem ser suficientemente testados por forma a obter uma certeza razoável de que conduzem aos resultados certos.

Procure comparar os resultados obtidos pelos dois métodos.

Pode utilizar para testar os programas os dois exemplos apresentados em anexo.

O relatório do Trabalho não pode exceder 10 páginas A4, incluindo os programas.

O relatório deve ser entregue até ao dia 20 de Junho de 2003.

ANÁLISE NUMÉRICA

Trabalho Nº 4

Resolução numérica de problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias
Anexo

Exemplo 1.

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 2[y(x)]^2, & x \geq 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

A solução exacta deste problema é

$$Y(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Exemplo 2.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ -\sin(y_1(x)) \end{bmatrix}, & x \geq 0, \\ \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, & 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

A solução exacta deste problema não pode ser expressa em termos de funções elementares. No entanto esta solução satisfaz à *equação de conservação*

$$E(y_1(x), y_2(x)) := \frac{1}{2}[y_2(x)]^2 + 1 - \cos(y_1(x)) = 1 - \cos(\alpha),$$

a qual pode ser usada para controlar o erro da integração numérica.